NUMERI REALI

Ripassiamo gli insiemi numerici incontrati finora e le operazioni che possono essere effettuate affinché il risultato sia ancora un numero dell'insieme (operazioni interne)

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} - \{0\}$ $\quad \mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} - \{0\}$ $\quad \mathbb{R}^+$ = numeri reali positivi $\quad \mathbb{R}^-$ = numeri reali negativi

OPERAZIONI

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ NUMERI NATURALI $(+, \times)$

$\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots\}$ NUMERI INTERI $(+, -, \times)$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}_0 \right\}$ NUMERI RAZIONALI O FRAZIONARI $(+, -, \times, :)$

interi $\neq 0$ diversi

(N.B. $\frac{3}{0}$ impossibile)

$\mathbb{Q}$ = (NUMERI RAZIONALI)
- interi $0, \pm 1, \pm 2$ IDENTIFICATI CON LE (FRAZIONI IL CUI DENOMINATORE È 1 ! $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}$)
- decimali finiti: $2{,}1$; $3{,}17$; $5{,}123 \rightarrow$ FRAZIONI DECIMALI $\frac{21}{10}$; $\frac{317}{100}$; $\frac{5123}{1000}$
- decimali periodici semplici: $2{,}\overline{3}$; $12{,}\overline{45}$
- decimali periodici misti: $0{,}1\overline{2}$; $1{,}1\overline{34}$; $21{,}01\overline{3}$

* Riconducibili a frazioni (FRAZIONE GENERATRICE)

es. $2{,}\overline{3} = \frac{23-2}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$

$0{,}1\overline{2} = \frac{12-1}{90} = \frac{11}{90}$

Si dice che l'insieme $\mathbb{Q}$ è denso perché dati due numeri razionali esiste sempre almeno un numero razionale compreso fra essi.

Esempio 1: determina due numeri razionali tra $\frac{1}{3}$ e $\frac{5}{6}$.

$\frac{1}{3} \quad \frac{5}{6}$ $\qquad m.c.m\,(3,6) = 6$

moltiplico NUM. e DEN. per 2

$\frac{2}{6} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{5}{6}$

quindi $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ sono razionali compresi

Esempio 2:

Se ho $\rightarrow \frac{4}{5}$ e $\frac{5}{6}$ determina DUE numeri razionali compresi fra essi:

m.c.m. $(5,6) = 30$

$\frac{24}{30} \qquad \frac{25}{30}$

Poiché tra 24 e 25 non ci sono numeri naturali devo moltiplicare numeratore e denominatore delle due frazioni per uno stesso numero $\neq 0$ (proprietà INVARIANTIVA) Ad es.: 2

$$\frac{2\cdot 24}{2\cdot 30} \qquad \frac{25\cdot 2}{30\cdot 2}$$

$$\frac{48}{60} \qquad \frac{49}{60} \qquad \frac{50}{60}$$

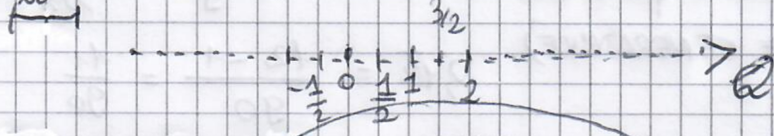
ne trovo 1 solo, allora moltiplico per 3

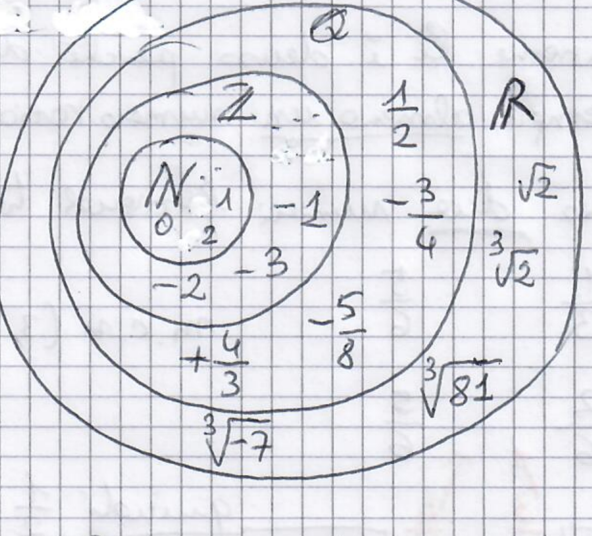
$$\frac{3\cdot 24}{3\cdot 30} \qquad \frac{25\cdot 3}{30\cdot 3}$$

$$\frac{72}{90} \qquad \frac{73}{90} \quad \frac{74}{90}=\frac{37}{45} \qquad \frac{75}{90}$$

Ho pertanto trovato i due numeri razionali $\frac{73}{90}$ e $\frac{74}{90}=\frac{37}{45}$

La retta numerica ancora è incompleta, i numeri razionali sono infiniti, ma non riescono a riempire la retta che rimane "bucata"

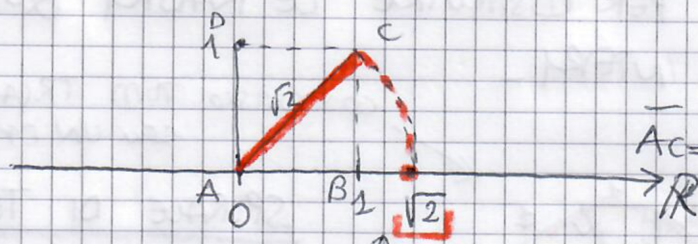




L'insieme numerico Q si amplia per consentire le soluzioni di equazioni del tipo: $x^2=2 \rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

ossia per poter effettuare la radice quadrata, operazione inversa della potenza

COSTRUZIONE CON RIGA E COMPASSO DI $\sqrt{2}$



Riempio un buco sulla retta

TEOREMA DI PITAGORA

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$ sono numeri irrazionali ossia che non possono essere espressi tramite una frazione. I numeri irrazionali sono numeri decimali illimitati APERIODICI, ossia le cifre dopo la virgola sono infinite (non periodiche) nessun gruppo di cifre si ripete infinitamente

ES: $-\sqrt{7}$ IRRAZIONALE (7 non è un quadrato perfetto)

0,34334333433334... IRRAZIONALE perché le cifre dopo la virgola non si ripetono, anche se esiste un ALGORITMO DI CALCOLO che riesce a costruire il numero (il nº dei 3 aumenta con regolarità)

π è IRRAZIONALE

$\sqrt{0,25}=\sqrt{(0,5)^2}=0,5$ ← questo è RAZIONALE

decimale finito

$0,5=\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{10}_{2}}=\frac{1}{2}$

Con i numeri irrazionali la retta è CONTINUA.

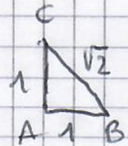
ℝ è COMPLETO: ad ogni punto della retta corrisponde un solo numero reale e, viceversa ad ogni numero reale corrisponde un solo punto della retta (CORRISPONDENZA BIUNIVOCA)

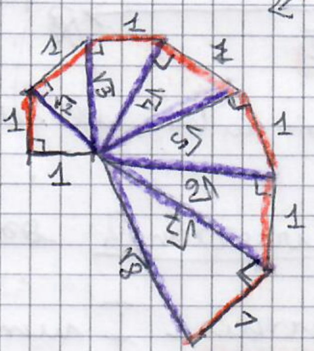
ℝ =
- ℚ razionali
  - interi
  - decimali finiti
  - decimali periodici semplici
  - decimali periodici misti
- I irrazionali → decimali illimitati aperiodici: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, π (TRASCENDENTE)

METODO GRAFICO PER COSTRUIRE LE RADICI QUADRATE DI TUTTI I NUMERI INTERI _

COSTRUISCO TUTTI TRIANGOLI RETTANGOLI CON UN CATETO DI MISURA 1

TEOREMA DI PITAGORA





SPIRALE DI TEODORO DI CIRENE

(V secolo a.C.)

matematico greco antico (Scuola Pitagorica)

$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2} =$

$= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

(**NOTA STORICA**: i pitagorici pensavano che il mondo fosse rappresentabile solo con numeri razionali; quando venne scoperta l'esistenza di numeri irrazionali entrarono in crisi e non volevano che la notizia si diffondesse. Si narra che uno dei discepoli, Ippaso da Metaponto divulgò il segreto e morì annegato.)

TEOREMA

$\sqrt{2}$ è IRRAZIONALE

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

L'assurdo in questa dimostrazione si trova perché avendo posto p e q privi di fattori primi comuni non possono essere entrambi pari come avviene invece nella dimostrazione)

(NEGO LA TESI (che sia IRRAZIONALE) e TROVO UNA CONTRADDIZIONE O CADE UN TEOREMA PRECEDENTEMENTE DIMOSTRATO)

Devo dimostrare che $\sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$. Allora nego questa affermazione (PROCEDIMENTO PER ASSURDO)

Supponiamo che $\sqrt{2}$ sia RAZIONALE, quindi supponiamo si possa scrivere sotto forma di frazione

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$ con p e q primi tra loro (cioè non hanno fattori primi in COMUNE)

Elevo entrambi i membri al quadrato:

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$ moltiplico entrambi i membri per q^2 $\Rightarrow$ $\boxed{2q^2 = p^2}$ *

Se p^2 si può esprimere come 2 volte q^2 significa che p^2 è pari.

Se p^2 è pari anche p è pari (fate una prova con i numeri).

Se p è pari allora lo scrivo come $\boxed{p = 2k}$, sostituendo in *:

$$2q^2 = (2k)^2 \rightarrow 2q^2 = 4k^2 \xrightarrow[\text{divido}]{} q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2 \text{ è pari} \Rightarrow q \text{ è pari}$$

C.V.D (come volevasi dimostrare) tutto per 2 (2° membro) ASSURDO