INTEGRALI INDEFINITI

Definizione di funzione primitiva
Data una funzione *f(x)* definita in un intervallo I, se esiste un'altra funzione *F(x)* che in ogni punto del suddetto intervallo ha per derivata *f(x)*, si dice che *F(x)* è una funzione primitiva della funzione *f(x)* in I: $F'(x) = f(x)$.

Ad esempio:
La funzione $F(x) = \frac{x^2}{2}$ è una primitiva della funzione $f(x) = x$ in quanto $F'(x) = \frac{2x}{2} = x = f(x)$ La funzione $F(x) = \sin x$ x è una primitiva della funzione $f(x) = \cos x$ in quanto $F'(x) = \cos x = f(x)$

Per le funzioni primitive valgono i seguenti teoremi:

Teorema 1 (della costante)
Se la funzione *f(x)* ammette in un intervallo I di R come primitiva la funzione *F(x)*, allora ne ammette infinite che si ottengono tutte aggiungendo alla *F(x)* una qualunque costante c reale.
La dimostrazione è immediata in quanto la derivata di una costante vale sempre zero, dunque anche $F(x) + c$ è una primitiva di *f(x)*.

Questa primitiva generale si chiama *integrale indefinito di f(x)* e si rappresenta col simbolo

$$\int f(x)dx$$

e si legge *"integrale indefinito di f(x) in dx".*

L'integrale indefinito è un operatore lineare in quanto valgono le seguenti proprietà:

$$\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx$$

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)]dx = k_1 \int f(x)dx + k_2 \int g(x)dx$$

Teorema 2 (dell'esistenza)
Per ogni funzione continua in un intervallo I di R esiste sempre almeno una primitiva.

Principali metodi di integrazione

Integrazione immediata
Integrazione delle funzioni razionali fratte
Integrazione per sostituzione
Integrazione per parti

Integrali immediati

L'operazione di integrazione è in qualche modo l'operazione inversa della derivata .
La definizione di integrale indefinito ci permette di compilare il seguente quadro di integrali immediati:

	Essendo, infatti:
$\int dx = x + c$	$D(x+c) = 1$
$\int k dx = kx + c$	$D(kx+c) = k$
$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c$	$D(\frac{x^{k+1}}{k+1} + c) = x^k$
$\int \frac{1}{x} dx = \log\lvert x\rvert + c$	$D(\log\lvert x\rvert + c) = \frac{1}{x}$
$\int e^x dx = e^x + c$	$D(e^x + c) = e^x$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$	$D(\frac{a^x}{\log a} + c) = a^x$
$\int senx dx = -\cos x + c$	$D(-\cos x + c) = senx$
$\int \cos x dx = senx + c$	$D(senx + c) = \cos x$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$	$D(tgx + c) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\int \frac{1}{sen^2 x} dx = -\cot gx + c$	$D(-\cot gx + c) = \frac{1}{sen^2 x}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsenx + c = -\arccos x + c$	$D(arcsenx + c) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c = -arc\cot gx + c$	$D(arctgx + c) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\int [f(x)]^\alpha f'(x) dx = \frac{1}{\alpha+1}[f(x)]^{\alpha+1} + c \qquad \text{se} \quad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log\lvert f(x)\rvert + c$$

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Consideriamo la funzione razionale fratta

$$y = \frac{N(x)}{D(x)} ,$$

quoziente fra due polinomi in x e sia $N(x)$ di grado m e $D(x)$ di grado n.

- Il grado del numeratore è maggiore o uguale del grado del denominatore: $m \geq n$
  Si divide $N(x)$ per $D(x)$ con l'algoritmo di divisione e otteniamo un $Q(x)$ e un resto $R(x)$ che risultano immediatamente integrabili: $\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$

- Il grado del numeratore è minore del grado del denominatore: $m < n$

a) Gli zeri del denominatore sono reali e distinti.

Ricordiamo che la scomposizione di un trinomio di secondo grado è:

se $\Delta > 0$ $\quad ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ con x_1 e x_2 radici dell'equazione di secondo grado associata.

Esempio:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = -\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + c = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + c$$

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \quad \text{ossia } 1 = A(x-2) + B(x-1) \text{ da cui } 1 = x(A+B) - 2A - B$$

per il principio di identità dei polinomi si avrà $\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - B = 1 \end{cases}$ da cui $A = -1$ e $B = 1$

b) Gli zeri del denominatore sono reali e coincidenti .

Esempio:

$$\int \frac{dx}{4x^2 - 4x + 1} = \int \frac{dx}{(2x-1)^2}$$

Si tratta di un integrale risolubile per <u>sostituzione</u>.

Basterà porre $2x-1=t$ da cui $2dx = dt$ ossia $dx = \frac{1}{2}\,dt$.

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\int t^{-2}dt = -\frac{1}{2t} + c = -\frac{1}{2(2x-1)} + c$$

c) Gli zeri del denominatore sono complessi e coniugati.

Con opportuni accorgimenti (talvolta laboriosissimi) l'integrale proposto dovrà essere ricondotto ancora ad un integrale per sostituzione ed il risultato dovrà sempre essere l'arcotangente di un binomio di primo grado (eventualmente incompleto).

Esempio:

$$\int \frac{dx}{9x^2 - 6x + 2} = \int \frac{dx}{9x^2 - 6x + 1 + 1} = \int \frac{dx}{(3x-1)^2 + 1} \quad \text{poniamo } 3x-1=t \text{ da cui } 3dx=dt \text{ ossia } dx=\frac{1}{3}dt$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{3}arctgt + c = \frac{1}{3}arctg(3x-1) + c$$

Integrazione per sostituzione

Il calcolo dell'integrale a volte può risultare più semplice se si opera un cambiamento della variabile di integrazione.

Se $f(x)$ è la funzione da integrare si pone $x = g(t)$ *(1)*, supponendo <u>g derivabile e invertibile</u> in un opportuno intervallo: si ha quindi $t = g^{-1}(x)$ la funzione inversa. Differenziando la *(1)* si ha $dx = g'(t)dt$ e pertanto l'integrale di $\int f(x)dx$ si può scrivere:

$$\int f[g(t)]g'(t)dt$$

Esempio:

Calcolare $\int \sqrt{3x+1}\,dx$

3x+1 = t da cui x= (t-1)/3 (x= g(x)) dx= $\frac{1}{3}dt$

$$\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9}\sqrt{(3x+1)^3} + c$$

Integrazione per parti

Consideriamo il prodotto di due funzioni ***f(x)*** e ***g(x)***, che supporremo entrambe <u>derivabili</u> ; sia quindi

$$y = f(x)g(x)$$

differenziamo questo prodotto: $dy = df(x)g(x) + f(x)dg(x)$ da cui

$$f(x)dg(x) = dy - g(x)df(x)$$

integriamo ora entrambi i membri e, ricordando che l'integrale di *dy* è uguale a *y*, avremo:

$$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x)$$

ossia $$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

Esempio: $\int xsenxdx = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + senx + c$

$g'(x)$ = senx $\qquad$ $g(x)$ = - cosx

$f(x)$ = x $\qquad$ $f'(x) = 1$

Esercizi:

Integrare per parti:

$\int \log xdx =$ $\qquad$ $\int sen^2 dx = \int senx \cdot senxdx = \ldots$

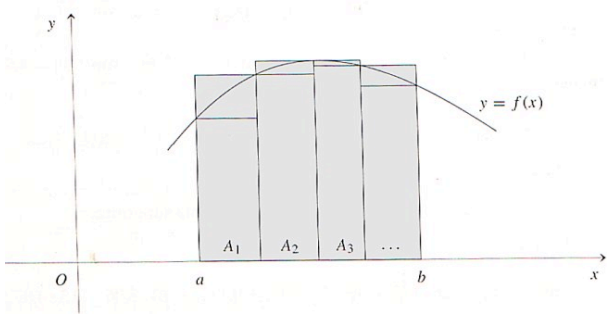
INTEGRALI DEFINITI

Il problema del calcolo delle aree è un problema antico che risale già ai tempi di Archimede.

- Il problema che storicamente portò al calcolo degli integrali definiti fu quello di determinare l'area delle superfici piane limitate da contorni curvilinei.
- Dalla geometria elementare sappiamo che l'area di un quadrato Q, rispetto ad un altro quadrato q preso come unità di misura, è il numero reale positivo che esprime il rapporto fra Q e q.
- Dalla teoria dell'equivalenza si sa poi che ogni poligono è equivalente ad un quadrato (e quindi equiscomponibile con esso) e quindi si definisce come area di un poligono l'area del quadrato ad esso equivalente.

Il cerchio però non è equiscomponibile con nessun poligono. La linea seguita per definire l'area del cerchio è la seguente: si considerano due classi di poligoni regolari inscritti e circoscritti al cerchio (Archimede considerò poligoni con 96 lati): indichiamo con an l'area del poligono regolare di n lati inscritto nel cerchio e con An l'area del poligono regolare di n lati circoscritto al cerchio. Servendosi della definizione di limite si definisce l'area del cerchio come il limite comune a cui tendono le due successioni formate, rispettivamente, dalle aree dei poligoni inscritti e circoscritti al cerchio.

E' necessario allora determinare un procedimento generale che consenta di definire e determinare l'area delle superfici piane limitate da contorni curvilinei qualsiasi.



Consideriamo una funzione *f(x)* , definita e positiva[1] nell'intervallo [a, b].

Suddividiamo l'intervallo [a, b] in *n* parti non necessariamente uguali di ampiezza Δx_1, Δx_2, ….., Δx_n.

Poiché la funzione è continua in uno spazio compatto, essa ammette in ogni intervallo massimo e minimo assoluto (teroema di Weierstrass). Sia

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ il valore minimo nell'intervallo i-esimo $[x_i, x_{i+1}]$

$M_1, M_2, \ldots, M_n$ il valore massimo nell'intervallo i-esimo $[x_i, x_{i+1}]$

Consideriamo ora

$s_i = m_i \cdot \Delta x_i$ area dell'i-esimo rettangolo inscritto

$S_i = M_i \cdot \Delta x_i$ area dell'i-esimo rettangolo circoscritto

Sia poi

[1] f(x)>0 è un ipotesi che successivamente potrà essere rimossa

s_n area del plurirettangolo inscritto (scaloide inscritto)

$$s_n = m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \cdot \Delta x_2 + ... + m_n \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$ (somma degli s_i per i che va da 1 a n)

S_n area del plurirettangolo circoscritto (scaloide circoscritto)

$$S_n = M_1 \cdot \Delta x_1 + M_2 \cdot \Delta x_2 + ... + M_n \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$ (somma degli S_i per i che va da 1 a n)

E' chiaro che per qualunque *n* si ha sempre $s_n \leq S_n$.
Osserviamo che fra tutti i Δx_i ve ne sarà uno maggiore degli altri e che per il massimo dei $\Delta x_i \to 0$, cioè max $\Delta x_i \to 0$, diminuirà M_i mentre aumenterà m_i.
E' intuitivo che se la s_n aumenta e la S_n diminuisce, esse tenderanno a coincidere con l'are del trapezoide AA'B'B.

Ciò si esprime anche dicendo che le due successioni sn e Sn sono convergenti e convergono allo stesso numero che si chiama **<u>integrale definito della funzione y = f(x) nell'intervallo [a, b]</u>** e si indica con:

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

il simbolo di integrale è una S allungata e deriva dal fatto che rappresenta la somma delle aree dei plurirettangoli inscritti e circoscritti, *a* e *b* sono chiamati estremi di integrazione (a estremo inferiore e b estremo superiore), f(x) funzione integranda.

L'espressione f(x)dx ha origine dai prodotti $f(x_i) \cdot \Delta x_i$ che costituiscono i termini che si sommano e che il passaggio al limite per $n \to \infty$ ha trasformato gli elementi finiti Δx_i in infinitesimi cioè nel differenziale *dx*.

Definizione
Si definisce area del trapezoide il limite al quale tendono contemporaneamente l'area del plurirettangolo inscritto e l'area del plurirettengolo circoscritto, quando tende a zero la massima ampiezza degli intervalli parziali in cui è stato diviso l'intervallo [a,b].

Definizione
Dicesi integrale definito della funzione *f(x)* continua in [a, b] il limite al quale tende la somma integrale, al tendere comunque a zero dell'ampiezza massima Δx di tutti gli intervallini in cui è stato diviso l'intervallo [a, b].

Differenza tra integrale indefinito e definito:
l'integrale indefinito, che dipende dalla variabile di integrazione x, è un insieme di funzioni che differiscono fra loro per una costante additiva arbitraria;
l'integrale definito è un numero che rappresenta il limite della somma integrale, quindi la variabile x è una "variabile apparente", perché essa scompare una volta calcolato l'integrale.

Proprietà degli integrali definiti

1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

2) $\int_a^a f(x)dx = 0$

3) Se c è un punto interno di [a, b] dove *f(x)* è integrabile, si ha: $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

4) Se $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$ sono integrabili in [a, b], si ha:

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)dx$$

5) Se k è una costante ed *f(x)* è integrabile in [a, b], si ha: $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$

6) Se in [a, b], con a<b, le due funzioni *f(x)* e *g(x)* sono tali che $f(x) \le g(x)$, si ha: $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

Teorema della media:

Data la funzione *f(x)*, continua in [a, b], esiste almeno un punto c interno all'intervallo per il quale risulta:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

Funzione integrale.

Data la funzione *f(x)* continua in [a, b] ed x un punto variabile di [a, b], $\int_a^b f(x)dx$ è un numero, se invece consideriamo $\int_a^x f(t)dt$ si ha una funzione del suo estremo superiore nel senso che ogni valore attribuito alla x nell'intervallo [a, b] corrisponde uno ed un solo valore per l'integrale $\int_a^x f(t)dt$ e quindi esso rappresenta una funzione *F(x)* dell'estremo superiore *x*.

Per non far confusione tra l'estremo superiore *x* e l'argomento della funzione integranda *f(x)* è conveniente indicare quest'ultimo con t, quindi si ha:

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ la *F(x)* si chiama funzione integrale.

Teorema di Torricelli-Barrow.

Se la funzione integrando *f(x)* è continua in [a, b], la funzione integrale *F(x)* è una primitiva di f(x).

Ipotesi: f(x) continua in [a, b] Tesi: *F'(x)=f(x)*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Teorema di Torricelli

Il valore dell'integrale definito dalla *f(x)*, relativa ad [a, b] è uguale alla differenza dei valori che una qualsiasi primitiva di f(x) acquista rispettivamente all'estremo superiore b e all'estremo inferiore a.

$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)$, dove $\varphi(b)$ è una qualunque primitiva di *f(x)*