TEOREMI SUL CALCOLO DEI LIMITI

$x \to c$ o $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$

TEOREMA

IL LIMITE DEL PRODOTTO DI UNA FUNZIONE PER UN NUMERO REALE DIVERSO DA ZERO.

Se $\lim_{x\to c} f(x) = l$ finito

allora $\boxed{\lim_{x\to c} k\cdot f(x) = k\cdot l}$ $k \in R$, $k \neq 0$

- Se $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ allora

  se $k>0$ $\lim_{x\to c} k\cdot f(x) = +\infty$

  se $k<0$ $\lim_{x\to c} k\cdot f(x) = -\infty$

- Se $\lim_{x\to c} f(c) = -\infty$ allora

  se $k>0$ $\lim_{x\to c} k\cdot f(x) = -\infty$

  se $k<0$ $\lim_{x\to c} k\cdot f(x) = +\infty$

ES: $\lim_{x\to\infty} 2x^2 = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty} (-2)\cdot x^2 = -\infty$

TEOREMA

LIMITE DELLA FUNZIONE RECIPROCA

- Se $\lim_{x\to c} f(x) = l \in R, l \neq 0$ allora

$$\boxed{\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}}$$

- Se $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ ($+\infty$ o $-\infty$) allora

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = 0$$

- Se $\lim_{x\to c} f(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

- Se $\lim_{x\to c} f(x) = 0^- \Rightarrow \lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

ES: $\lim_{x\to 5} (x-5) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 5} \frac{1}{x-5} = \infty$

$\lim_{x\to\infty} 2x = \infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = 0$

TEOREMA

LIMITE DELLA SOMMA ALGEBRICA DI FUNZIONI

Se $\lim_{x\to c} f(x) = l$ e $\lim_{x\to c} g(x) = m$

con $l, m \in R$ allora

$$\boxed{\lim_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = l \pm m}$$

Nelle somme dei limiti vale l'algebra dei numeri reali con una eccezione

CASO PARTICOLARE:

$$\lim_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = \boxed{+\infty - \infty}$$

Si dice che è una FORMA INDETERMINATA (F.I.)

TABELLA DEI CASI (si conserva l'algebra dei segni)

$l, m \in R$ (numeri reali)

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim[f+g]$ (SOMMA)	$\lim[f-g]$ (DIFFERENZA)
l	m	$l+m$	$l-m$
l	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$
$\pm\infty$	m	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\boxed{+\infty-\infty}$ F.I.
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\boxed{-\infty+\infty}$ F.I.
$+\infty$	$-\infty$	$\boxed{+\infty-\infty}$ F.I.	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$\boxed{-\infty+\infty}$ F.I.	$-\infty$

ES:

$\lim_{x\to 2^+} 3x = 6$ $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$

$\lim_{x\to 2^+} \left[3x + \frac{1}{x-2}\right] = 6 + \infty = +\infty$

Usando le def. si può verificare che:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3x^2-6x+1}{x-2} = +\infty$$

$\lim_{x\to+\infty} (-x^5+x^2) = -\infty+\infty$ F.I.

$\lim_{x\to+\infty} x^5(-1+\underbrace{\tfrac{1}{x^3}}_{\to 0}) = +\infty(-1) = -\infty$

TEOREMA: LIMITE DEL PRODOTTO DI DUE FUNZIONI

Se $\lim_{x\to c} f(x) = l$ e $\lim_{x\to c} g(x) = m$

con $l, m \in R$ allora

$$\boxed{\lim_{x\to c} [f(x)\cdot g(x)] = l\cdot m}$$

CASO PARTICOLARE:

$$\lim_{x\to c} [f(x)\cdot g(x)] = \boxed{0\cdot\infty} \text{ F.I.}$$

è una FORMA INDETERMINATA

TABELLA DEI CASI

Si conserva l'algebra dei segni — (es: $+\infty\cdot(-\infty) = -\infty$)

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim[f(x)\cdot g(x)]$
l	m	$l\cdot m$
0	0	0
$l>0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$l<0$	$\pm\infty$	$\mp\infty$
$\pm\infty$	$m>0$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$m<0$	$\mp\infty$
$\pm\infty$	0	$\boxed{\infty\cdot 0}$ F.I
0	$\pm\infty$	$\boxed{0\cdot\infty}$ F.I.
∞	∞	∞

ES: Se $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ $\lim_{x\to 0} \frac{3}{x^2} = +\infty$

$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{3}{x^4} = +\infty$

Se $\lim_{x\to 0} -\frac{2}{x^2} = -\infty$

$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{-2}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-2}{x^4} = -\infty$

TEOREMA LIMITE DEL QUOZIENTE DI DUE FUNZIONI

Se $\lim_{x\to c} f(x) = l$ e $\lim_{x\to c} g(x)$

$l, m \in R$, $\boxed{m \neq 0}$ allora

$$\boxed{\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}}$$

CASI PARTICOLARI:

$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{\frac{0}{0}}$ F. I.

$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ F. I.

TABELLA DEI CASI

Si conserva l'algebra dei segni

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$
l	$m\neq 0$	$\frac{l}{m}$
l	0	$\frac{l}{0} = \infty$
0	0	$\boxed{\frac{0}{0}}$ F.I.
l finito	∞	$\frac{l}{\infty} = 0$
∞	m finito	$\frac{\infty}{m} = \infty$
∞	∞	$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ F.I.

N.B. $\frac{0}{\infty} = 0$ e $\frac{\infty}{0} = \infty$

ES:

$\lim_{x\to 3} (x-1) = 2$ $\lim_{x\to 3^\pm} (x-3) = 0^\pm$

$\lim_{x\to 3^+} \frac{x-1}{x-3} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to 3^-} \frac{x-1}{x-3} = \frac{2}{0^-} = -\infty$