INTRODUZIONE ALLE EQUAZIONI LOGARITMICHE

$$y = \log_a x \overset{def.}{\Longleftrightarrow} x = a^y$$

IL LOGARITMO È L'ESPONENTE Y A CUI DEVO ELEVARE LA BASE a PER OTTENERE L'ARGOMENTO Y

① $\log_5(x+2) = 3 \xrightarrow{\text{per def}} x+2 = 5^3$

OPPURE:

$\log_5(x+2) = \log_5 125$ $\qquad 3 = \log_5 5^3$

SCRIVO 3 COME LOGARITMO IN BASE 5

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \rightarrow f(x) = g(x)$$

se hanno le stesse base allora posso egli argomenti

$\log_5(x+2) = \log_5 5^3$ uguaglianza di esponenti (il logaritmo è un esponente)

$\Rightarrow$ UGUAGLIANZE DEGLI ARGOMENTI

$$\text{C.E}\begin{cases} x+2 = 125 \\ x+2 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 123 \text{ accett.} \\ x > -2 \end{cases}$$

L'ACCETTABILITÀ DELLA SOLUZIONE SI FA CONTROLLANDO IL C.E. DEL LOG.

---

② $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}}(8+x) = -1 = \log_{\frac{1}{2}} 2$ dobbiamo portare all'uguaglianza tra 2 esponenti che hanno uguale base

③ PROPRIETÀ DELLA SOMMA DI LOG.

$$\boxed{\log_{\frac{1}{2}} x(8+x) = \log_{\frac{1}{2}} 2}$$

$$\text{C.E.}\begin{cases} x>0 \\ 8+x>0 \\ x(8+x) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0 \\ x>-8 \\ 8x + x^2 = 2 \end{cases}$$

N.B. OCCORRE SEMPRE FARE IL C.E. DEI LOGARITMI

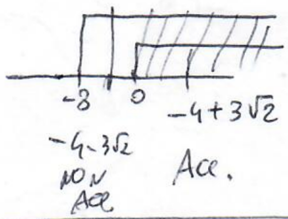
$$\begin{cases} x>0 \\ x>-8 \\ x^2+8x-2=0 \end{cases}$$

$x>0 \rightarrow \boxed{x>0}$ è la condizione più stringente, più forte

$$x^2+8x-2=0 \longrightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+2}}{1} = -4 \pm 3\sqrt{2} = \begin{cases} -4+3\sqrt{2} & \text{acc.} \\ -4-3\sqrt{2} & \text{NON Acc.} \end{cases}$$

$\sqrt{18} > \sqrt{16} = 4$

$\Rightarrow -4+\sqrt{18} > 0$



---

③ N.B. $\log a + \log b = \log ab$ $\quad$ C.E. $a>0$, $b>0$

$a \neq 0$
$b \neq 0$

altrimenti se $a \cdot b > 0$ $\quad a>0\ b>0 \vee a<0, b<0$

CONDIZIONE MENO RESTRITTIVA

$\log(ab) \quad ab>0 \quad \begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases} \cup \begin{cases} a<0 \\ b<0 \end{cases}$

$\log(a \cdot b) = \log|a| + \log|b|$ sapendo che

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

opposto di x

$|x| \geq 0$ sempre NON NEGATIVA

BASI DIVERSE

(4) $\log_3(x+1) = 2\log_9(x^2+9) - 2$

$$\boxed{\log_c b = \log_c a \log_a b \rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

$$\boxed{\log_a c = \frac{1}{\log_c a} \qquad \log_a \frac{1}{n} = -\log_a n}$$

$$\log_3(x+1) = 2\,\frac{\log_3(x^2+9)}{\log_3 9} - 2$$

$$\log_3(x+1) = \frac{2\log_3(x^2+9)}{\underbrace{\log_3 3^2}_{=2}} - 2$$

$$\log_3(x+1) = \frac{\cancel{2}\log_3(x^2+9)}{\cancel{2}} - 2 \rightarrow \log_3(x+1) = \log_3(x^2+9) - 2$$

$$\log_3(x+1) - \log_3(x^2+9) = \log_3\frac{1}{9}$$

C.E. $\begin{cases} x+1>0 \\ x^2+9>0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$ $\qquad \log_3\frac{x+1}{x^2+9} = \log_3\frac{1}{9}$ $\qquad \begin{cases} x>-1 \\ \forall x\in\mathbb{R} \\ 9(x+1) = x^2+9 \end{cases}$ C.E $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\frac{x+1}{x^2+9} = \frac{1}{9} \rightarrow \frac{9(x+1)-(x^2+9)}{x^2+9} = 0$$

$$\begin{cases} x>-1 \\ \forall x\in\mathbb{R} \\ x^2-9x\cancel{+9}\cancel{-9}=0 \end{cases} \rightarrow x(x-9)=0 \;\Big\langle\; \begin{matrix} x=0 \text{ Acc.} \\ x=9 \text{ Acc.} \end{matrix}$$

-1 0 9

la fattorizzazione ci porta alla soluzione in modo più veloce

---

Se uno vuole può verificarla sostituendo nella equazione di partenza.

$$\log_3 10 = \log_3 90 - \log_3 9$$

$$\log_3 10 = \log_3 \frac{90^{10}}{9} \quad \text{vera}$$

(5) $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 20 = 0$ $\quad 2^x = y$ variabile ausiliaria

A volte non è possibile portare le potenze ad avere le stesse base

$y^2 - 9y + 20 = 0$

$(y-4)(y-5) = 0$

$y_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{10}{2} = 5 \\ \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$

$2^x = 4 \qquad 2^x = 5$

$\boxed{x = 2} \qquad \boxed{x = \log_2 5}$ def. di logaritmo.

Ancora altri tipi di equazioni logaritmiche

(6) $(\ln x)^2 - 5 \ln x + 4 = 0$ $\quad$ C.E $x > 0$

$\boxed{t = \ln x}$

$t^2 - 5t + 4 = 0$

$(t-4)(t-1) = 0$

$t = 4 \rightarrow \ln x = 4 \rightarrow \boxed{x = e^4}$

$t = 1 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow e^1 = x \rightarrow \boxed{x = e^1}$

$\ln x = 4 \rightarrow \ln x = \ln e^4 \rightarrow \boxed{x = e^4}$

$\ln x = \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\ln e} \rightarrow \boxed{x = e}$

VERIFICA

$x = e \quad (\ln e)^2 - 5 \ln e + 4 = 0$

$1 - 5 + 4 = 0$ vero

$x = e^4 \quad (\ln e^4)^2 - 5 \ln e^4 + 4 = 0$

$4^2 - 5 \cdot 4 + 4 = 0$

$0 = 0$ vero

(7) $\log_2(\log x) = 4 \longrightarrow 4 = \log_2 16$

$$\log_2(\log x) = \log_2 16$$

$$\begin{array}{l} \text{C.E.} \\ \text{C.E.} \\ \\ \end{array} \begin{cases} \log x > 0 \\ x > 0 \\ \log x = 16 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x > e^0 \\ x > 0 \\ x = e^{16} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 0 \\ x = e^{16} \text{ accettabile} \end{cases}$$

---

(8) DISEQUAZIONI LOGARITMICHE - ESPONENZIALI

Regole $\quad a^x < a^y \Leftrightarrow \begin{cases} x < y & \text{se } a > 1 \\ x > y & 0 < a < 1 \end{cases}$

$$\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow \begin{cases} x < y & \text{se } a > 1 \\ x > y & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Gli esercizi e i casi sono gli stessi

(1) $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x+1} > \left(\frac{8}{125}\right)$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x+1} > \left(\frac{2}{5}\right)^3 \longrightarrow 2x+1 < 3 \longrightarrow \boxed{x < 2}$$

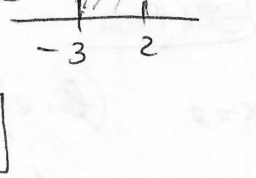
(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+3} > \left(\frac{2}{3}\right)^{9-x} \longrightarrow x^2+3 < 9-x \rightarrow 2x < 6 \rightarrow \boxed{x < 3}$

$$x^2 + x - 6 < 0$$

$$(x+3)(x-2) < 0$$

$x > -3$

$x > 2$



$$\boxed{-3 < x < 2}$$

(3) $2^{x-1} < 3^{x-1}$ esponenti uguali base $\neq 0$

$\Rightarrow x - 1 > 0$

$\boxed{x > 1}$

$2 < 3$ base della 1ª potenza è < della base della 2ª potenza

Oppure

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} < 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \Rightarrow x-1>0 \rightarrow \boxed{x>1}$$

(4) $5^{x-1} < 3^{x-1}$ invece se 5 (1^a base) $>$ 3 (2^a base)

Mantengo la disequazione

$x-1<0$

$\boxed{x<1}$

$$\boxed{2° \text{ caso } \quad a^{f(x)} < b^{f(x)} \Leftrightarrow f(x)=0}$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x-1} < \left(\frac{5}{3}\right)^0 \Rightarrow x-1<0 \ \boxed{x<1}$$

Oppure PASSO AI LOGARITMI, per esempio in base 10

$$\log 5^{x-1} < \log 3^{x-1}$$

$$(x-1)\log 5 < (x-1)\log 3$$

$$x\log 5 - \log 5 < x\log 3 - \log 3$$

$$x(\underbrace{\log 5 - \log 3}) < \log 5 - \log 3$$

conservo il VERSO PERCHE' $\log 5 - \log 3 > 0$

$$x < \frac{\log 5 - \log 3}{\log 5 - \log 3} = 1 \qquad \boxed{x<1}$$

---

(5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6x} + 8\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} - 20 > 0$

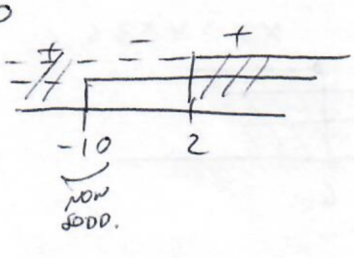
$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}\right]^2 + 8\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} - 20 > 0 \qquad t = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$$

$$t^2 + 8t - 20 > 0$$

$$(t+10)(t-2) > 0$$

$t > -10$

$t > 2$



S: $t < -10 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} < -10$ impossibile

$t > 2 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} > 2 \rightarrow$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \qquad 3x < -1$$

$$\boxed{x < -\frac{1}{3}}$$

⑥ $\log_2(x-15) \geq \log_2(x-10) + 1$

$\log_2(x-15) - \log_2(x-10) \geq \log_2 2$

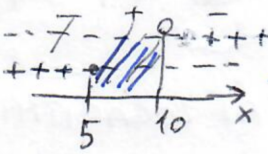
$\log_2 \dfrac{x-15}{x-10} \geq \log_2 2$

C.E. C.E. $\begin{cases} x-15>0 \\ x-10>0 \\ \dfrac{x-15}{x-10} \geq 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x>15 \\ x>10 \\ \dfrac{x-15-2x+20}{x-10} \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>15 \\ x>10 \\ \dfrac{-x+5}{x-10} \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>15 \\ x>10 \\ 5 \leq x < 10 \end{cases}$

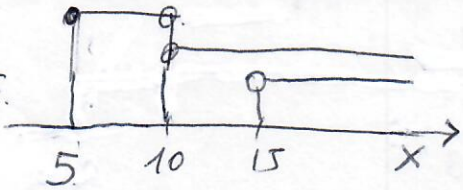
$N \geq 0: x \leq 5$

$D>0: x>10$



$\rightarrow 5 \leq x < 10$

$S = \emptyset$ S.F.



impossibile (NON CI SONO 3 LINEE PARALLELE SOVRAPPOSTE, 1 per ogni disequazione)

---

⑦ $2\ln(x-4) \geq \ln(x-2)$

$\ln(x-4)^2 \geq \ln(x-2)$

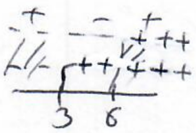
$(x-4)^2 \geq (x-2)$

$x^2-8x+16 \geq x-2$

$x^2-8x-x+16+2 \geq 0$

$x^2-9x+18 \geq 0$

$(x-6)(x-3) \geq 0$ $\quad x \geq 6 \quad x \geq 3$



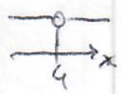
$x \leq 3 \vee x \geq 6$

c.e. $\begin{cases} x-4>0 \\ x-2>0 \end{cases} \rightarrow$ $\boxed{N.B}$ va fatto subito

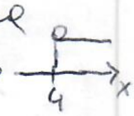
C.E. $\begin{cases} x>4 \\ x>2 \end{cases}$

$\boxed{N.B.}$ se faccio il C.E dopo l'applicazione delle proprietà, amplio il dominio le condizioni diventano più elastiche

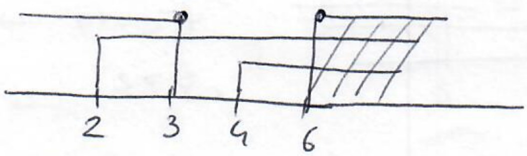
$(x-4)^2>0$ $\boxed{\forall x \neq 4}$



mentre prima era solo $x>4 \rightarrow$



C.E c.e $\begin{cases} x>4 \\ x>2 \\ x \leq 3 \vee x \geq 6 \end{cases}$



S. $(x \geq 6)$