FUNZIONI

Def

Siano A e B due insiemi non vuoti; si dice funzione da A a B una relazione, o legge, che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B.

$f: A \to B$ si legge f è una funzione da A a B

A = DOMINIO della funzione

B = CODOMINIO della funzione

f(A) = insieme delle immagini, l'insieme degli elementi di B che hanno "un collegamento proveniente da A", ossia una controimmagine in A.

f(x) è l'immagine di x

x è la controimmagine di y

FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$ ESPRESSIONE ANALITICA

FUNZIONE COSTANTE: $y = 3$

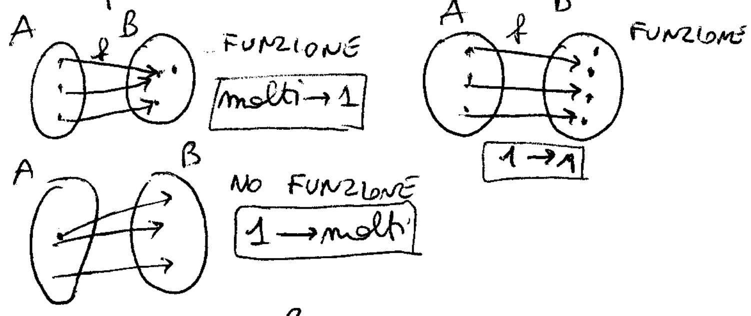
FUNZIONE IDENTITA': $y = x$ (BISETTRICE 1° e 3° QUADR)

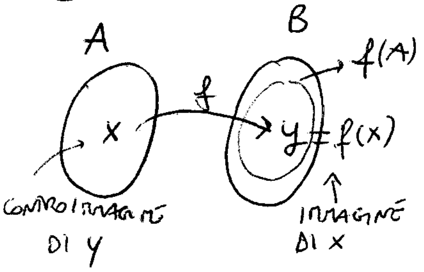
PER RICONOSCERE IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE BASTA TRACCIARE RETTE PARALLELE ALL'ASSE Y (VERTICALI) E OSSERVARE CHE INTERSECANO LA FUNZIONE IN UN UNICO PUNTO.

PER TROVARE IL DOMINIO DAL GRAFICO TRACCIO RETTE VERTICALI E TROVO GLI INTERVALLI DI X IN CUI LA FUNZIONE SI PUO' TRACCIARE

PER TROVARE IL CODOMINIO DAL GRAFICO TRACCIO RETTE ORIZZONTALI E TROVO I

Esempi



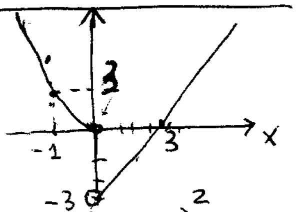


x variabile dipendente

y variabile indipendente

IMMAGINI

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \le 0 \quad \text{PARABOLA} \\ x - 3 & x > 0 \quad \text{RETTA} \end{cases}$$



$f(1) \Rightarrow 1 - 3 = -2$

$f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) = 1 + 2 = 3$

$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$ VEDI GRAFIC

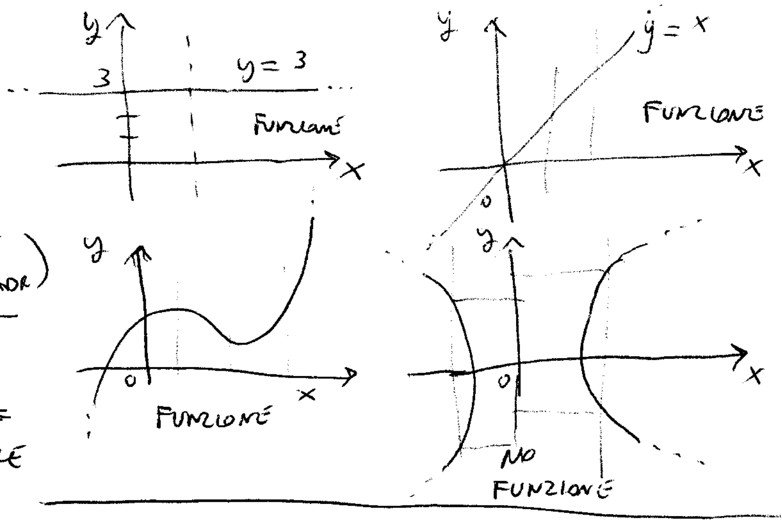
LA CONTROIMMAGINE DI 3: y

$3 = x^2 - 2x$

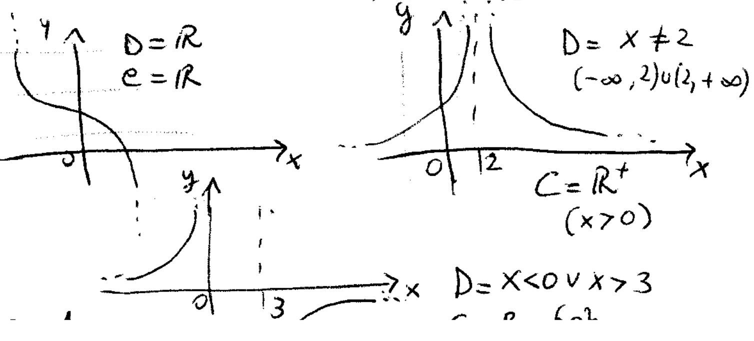
$x^2 - 2x - 3 = 0 \to \boxed{x = -1}$ ACCETTA, $x = 3$

$x = 2$ NON ACC

RICONOSCERE IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE



RICONOSCERE IL DOMINIO E IL CODOMINIO



DOMINI DI FUNZIONE

FUNZIONI ALGEBRICHE

SE NELLA LORO ESPRESSIONE ANALITICA CONTENGONO SOLO OPERAZIONI DI: ADDIZIONE, SOTTRAZIONE, MOLTIPLICAZIONE, DIVISIONE, ELEVAMENTO A POTENZA CON ESPONENTE RAZIONALE, ESTRAZIONE DI RADICE.

FUNZIONI TRASCENDENTI

Le funzione esponenziale e logaritmica, le funzioni goniometriche.

DOMINIO = INSIEME DEI VALORI CHE POSSO SOSTITUIRE ALLA x AFFINCHE' LA y SIA CALCOLABILE

DOMINI DI FUNZIONI ALGEBRICHE

FUNZIONI RAZIONALI INTERE

$y = P(x)$ Polinomi, $D = \mathbb{R}$

E' DEFINITA PER OGNI VALORE DI $x \in \mathbb{R}$.

FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

$y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ $\quad Q(x) \neq 0$

E' DEFINITA SE IL DENOMINATORE E' DIVERSO DA ZERO.

FUNZIONI IRRAZIONALI INTERE E FRATTE

$y = \sqrt[m]{R(x)}$ se m PARI $R(x) \geq 0$

RADICANDO ≥ 0

se m DISPARI DOMINIO DI $R(x)$

$y = \sqrt[m]{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$ $\quad m$ PARI $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$

m DISPARI $Q(x) \neq 0$

ESEMPI DI FUNZIONI ALGEBRICHE

$y = \dfrac{1}{x}$ RAZIONALE FRATTA (la x è al DENOMINATORE)

$y = x^4$ RAZIONALE INTERA (POLINOMIO)

$y = \sqrt[3]{x^2+1}$ IRRAZIONALE INTERA (RADICE CUBICA)

ESEMPI DI FUNZIONI TRASCENDENTI

$y = 3^x \quad y = x \cdot 2^{x-1} \quad y = \frac{1}{2}x^x$ ESPONENZIALI

$y = \sin x \quad y = \cos x \quad y = \tan x$ GONIOMETRICHE

$y = \log_3 x$ logaritmica

Es:

$y = x^4 + 2x^3 - x - 1 \quad D = \mathbb{R}$

$D = (-\infty, +\infty)$

1) $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$ $\quad x^2 - x \neq 0 \quad x(x-1) \neq 0 \quad x \neq 0,\ x \neq 1$

$D = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

$D = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

2) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^4 + 8x}$ $\quad x^4 + 8x \neq 0$

$x(x^3 + 8) \neq 0$

$x(x+2)(x^2 - 4x + 4) \neq 0$ $\quad x \neq 0,\ x \neq -2,\ \Delta < 0$

$D = \mathbb{R} - \{0, -2\}$

1) $y = \sqrt{x^2 - 4}$ $\quad x^2 - 4 \geq 0$ RADICANDO ≥ 0

IRRAZ. INTERA $D(x) \nexists$

$x^2 - 4 = 0 \quad x = \pm 2$

$x \leq -2 \vee x \geq 2$

$D = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

2) $y = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ IRRAZIONALE INTERA

Poiché l'indice di radice è DISPARI il DOMINIO E' UGUALE AL DOMINIO DI $x^2 - 4$ che è un polinomio quindi $D = \mathbb{R}$

FUNZIONI IRRAZIONALI

$$y = \sqrt[m]{\frac{P(x)}{Q(x)}}$$

se m PARI
RADICANDO ≥ 0

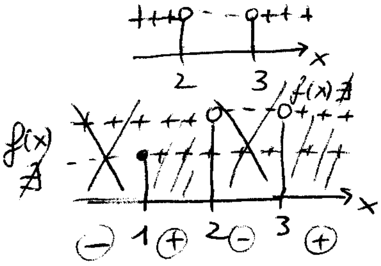
se m DISPARI
$Q(x) \neq 0$

CONDIZIONE : RADICANDO ≥ 0

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-5x+6}} \qquad \frac{x-1}{x^2-5x+6} \geq 0$$

$N \geq 0$: $x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$

$D > 0$: $x^2 - 5x + 6 > 0 \qquad x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad x_1 = 2,\ x_2 = 3$



$x < 2 \lor x > 3$

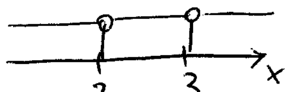
$\boxed{1 \leq x < 2 \cup x > 3}$

$D = [1, 2) \cup (3, +\infty)$

ES: $y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2-5x+6}}$ $\quad m = 3$ DISPARI

$x^2 - 5x + 6 \neq 0$

$x \neq 2 \land x \neq 3$



$D = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$

ESEMPI

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$$

IRRAZIONALE FRATTA
m DISPARI

DEN $\neq 0$

$\sqrt[3]{x+1} \neq 0$ ELEVO A CUBO ENTRAMBI I MEMBRI

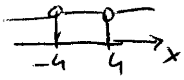
$x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$

$D = \mathbb{R} - \{-1\} \qquad D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

$$y = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{\sqrt[3]{x^2 - 16}}$$

$\sqrt[3]{x^2 - 16} \neq 0 \rightarrow x^2 - 16 \neq 0$

$x^2 \neq 16 \qquad x \neq \pm 4$



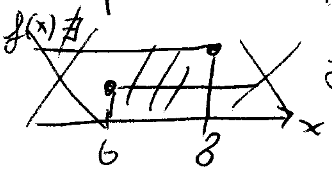
$D = (-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, +\infty)$

$$y = \sqrt{x-6} + \sqrt{8-x}$$

$$\begin{cases} x - 6 \geq 0 \\ 8 - x \geq 0 \end{cases}$$

Devo imporre che entrambi i radicandi siano positivi o nulli

$$\begin{cases} x \geq 6 \\ x \leq 8 \end{cases}$$



$6 \leq x \leq 8 \qquad D = [6, 8]$

$$y = \frac{\sqrt{2-x}}{x^2+1}$$

IRRAZIONALE FRATTA

INTERSEZIONE $S_1 \cap S_2 = S_F$

$$\begin{cases} (1)\ 2 - x \geq 0 \\ (2)\ x^2 + 1 \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (1)\ x \leq 2 \\ (2)\ \forall x \end{cases} \qquad x \leq 2$$

$\downarrow$

$\Delta = b^2 - 4ac =$
$= 0 - 4 \cdot 1 \cdot 1 =$
$= -4 < 0$

$\boxed{D = (-\infty, 2]}$

L'equazione non ha soluzioni quindi non ci sono valori di x che ANNULLANO IL DENOMINATORE

$$y = \frac{2-x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\begin{cases} \text{DEN} \neq 0 \\ \text{RADICANDO} \geq 0 \end{cases}$ cioè RADICAN > 0

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1} \neq 0 \\ x^2 + 1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \text{cioè } x^2 + 1 > 0$$

$+ (+) +$

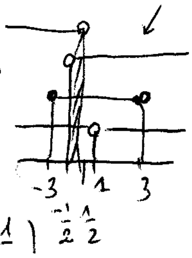
$\forall x \in \mathbb{R}$

$D = \mathbb{R}$

$$y = \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}} + \frac{\sqrt{9-x^2}}{2x+1} - \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$$

INTERSEZIONE

$$\begin{cases} (1)\ 1 - x \neq 0 \\ (2)\ 9 - x^2 \geq 0 \\ (3)\ 2x + 1 > 0 \\ (4)\ 1 - 2x > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (1)\ x \neq 1 \\ (2)\ -3 \leq x \leq 3 \\ (3)\ x > -1/2 \\ (4)\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$



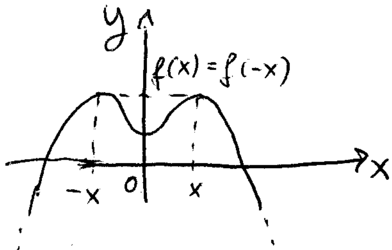
$D = -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \qquad D = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

FUNZIONI PARI E DISPARI

$f: R \to R$ è <u>PARI</u>

se $\forall x \in R \quad f(-x) = f(x)$

Il grafico di una funzione PARI è simmetrico rispetto all'asse y



FUNZIONE PARI (SIMMETRIA RISPETTO ALL'ASSE Y)

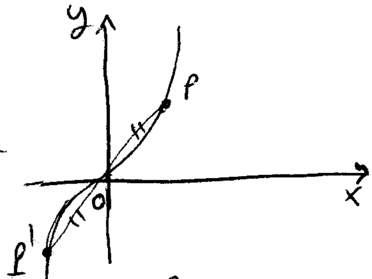
$y = x^2 \qquad f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ PARI

$y = \dfrac{x^4}{1-x^2} \qquad f(-x) = \dfrac{(-x)^4}{1-(-x)^2} = \dfrac{x^4}{1-x^2} = f(x)$ PARI

$f: R \to R$ è <u>DISPARI</u>

se $\forall x \in R \quad f(-x) = -f(x)$

Il grafico di una funzione DISPARI è simmetrico rispetto all'origine degli assi ossia rispetto all'asse x e all'asse y



FUNZIONE DISPARI (SIMMETRIA RISPETTO ALL'ORIGINE)

$y = x^3 \qquad f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ DISPARI

$y = \dfrac{x^3+x}{x^2-|x|} \qquad f(-x) = \dfrac{(-x)^3+(-x)}{(-x)^2-|-x|} =$

$= \dfrac{-x^3-x}{x^2-|x|} = -\dfrac{x^3+x}{x^2-|x|} \qquad |-x| = |x|$

$= -f(x)$ DISPARI

$y = \sqrt{x} \qquad x \geq 0$

$f(-x) = \sqrt{-x}$ non si può calcolare se $x \geq 0$ $\Rightarrow$ NÈ PARI NÈ DISPARI

FUNZIONI CRESCENTI E DECRESCENTI

$f: D \to R$ e sia $I \subseteq D$ (I sottoinsieme del DOMINIO)

f è STRETTAMENTE CRESCENTE IN I

se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I$

($\leq$ CRES. IN SENSO LATO)

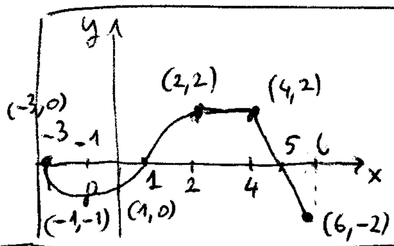
f è STRETTAMENTE DECRESCENTE IN I

se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I$

($\geq$ DECRESC. IN SENSO LATO)

f è COSTANTE IN I se

$\forall x_1, x_2 \in I \quad f(x_1) = f(x_2)$



STRETTAMENTE $f(x) \nearrow$ in $[-1, 2]$

$f(x) \searrow$ in $[-3, -1]$ e in $[4, 6]$

$f(x)$ COSTANTE IN $[2, 4]$

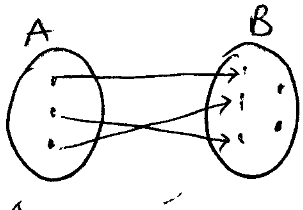
FUNZIONI <u>INIETTIVE</u>

$f: A \to B$

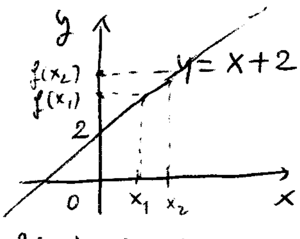
Def Si dice che $f(x)$ è iniettiva se ogni elemento y di B è IMMAGINE di al MASSIMO UN ELEMENTO x di A.

$\forall x_1 \neq x_2, \ x_1, x_2 \in A \quad f(x_1) \neq f(x_2)$

Ad elementi distinti corrispondono ...



FUNZIONE INIETTIVA



$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\forall x_1, x_2 \in R$

$x_1 + \cancel{2} = x_2 + \cancel{2}$

$x_1 = x_2$

A due immagini uguali corrispondono due controimmagini ...

$y = x^2 - 2x$

$x_1^2 - 2x_1 = x_2^2 - 2x_2$

$x_1^2 - x_2^2 = 2x_1 - 2x_2$

$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 2(x_1 - x_2)$

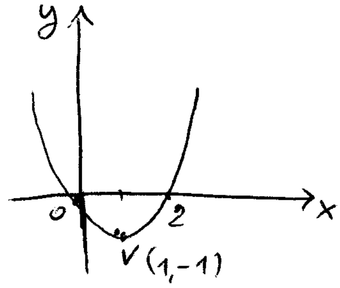
$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 2(x_1 - x_2) = 0$

$(x_1 - x_2)[x_1 + x_2 - 2] = 0$

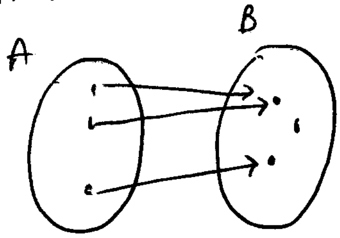
$x_1 = x_2$
$x_1 = 2 - x_2$ $\Rightarrow$ NON E' INIETTIVA

$y = x^2 - 2x$

$V(1, -1)$



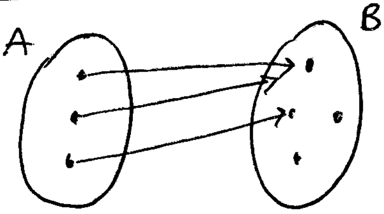
$x = 0$ e $x = 2$
hanno le stesse controimmagine $\Rightarrow$ NON E' INIETTIVA
$f(0) = f(2) = 0$. SE TRACCIO RETTE ORIZZONTALI TAGLIO LA FUNZIONE IN DUE PUNTI.



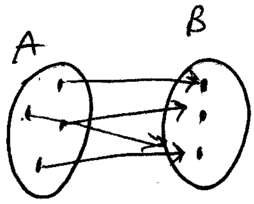
NON E' INIETTIVA
molti $\to$ 1

FUNZIONE SURIETTIVA
$f: A \to B$
se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A, se ha almeno 1 CONTROIMMAGINE in A.

$f(A) = B$ B coincide con l'insieme delle immagini



NON E' SURIETTIVA (2 elementi in B NON HANNO CONTROIMMAGINI)



SURIETTIVA
molti $\to$ 1
o $1 \to 1$

$B = f(A)$

COME DETERMINARE L'INSIEME DELLE IMMAGINI

ES: $y = \frac{1}{2}x + 3$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Devo invertire la funzione e scrivere x in funzione della y

$2y = x + 6$ $x = \underbrace{2y - 6}$ è un polinomio $\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}$

l'insieme delle immagini si trova facendo il dominio della funzione inversa.

LO SCOPO E' DETERMINARE LE X CHE SONO LE CONTROIMMAGINI DELLE Y.

ES: $y = x^2 - 2x$ $x^2 - 2x - \overset{\text{parametro}}{y} = 0$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4y}}{2} \Rightarrow 4 + 4y \geq 0$ $4y \geq -4$ $\boxed{y \geq -1}$ DOMINIO DELL'INVERSA

$f: \mathbb{R} \to [1, +\infty)$

↑ insieme delle IMMAGINI

↑ insieme delle IMMAGINI

FUNZIONE BIIETTIVA

Una funzione si dice BIIETTIVA se è INIETTIVA e SURIETTIVA -

FUNZIONE INVERSA

Una funzione INIETTIVA E SURIETTIVA ossia BIUNIVOCA (o BIIETTIVA) è invertibile.

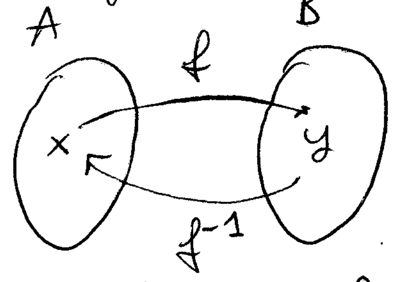
$$f: A \to B \qquad x \in A \rightsquigarrow y = f(x) \in B$$

$$f^{-1}: B \to A \qquad y \in B \rightsquigarrow f^{-1}(y) = x \in A$$

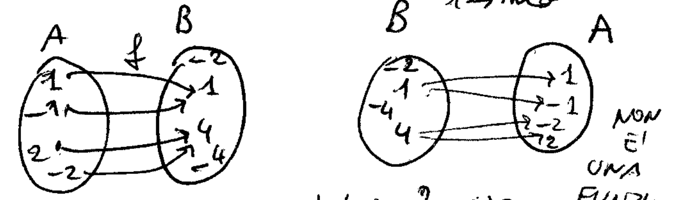
N.B. $f^{-1}(y) \neq \frac{1}{f(y)}$

$$f: A \longrightarrow B \qquad x \longrightarrow y = f(x)$$

$$f^{-1}: B \longrightarrow A \qquad y \longrightarrow f^{-1}(y) = x$$



ES



$f(x) = y = x^2$ E' invertibile? NO

E' INIETTIVA? NO, da due elementi di x si va nello stesso elemento di y -

E' SURIETTIVA? Dipende da come defi= nisco l'insieme B -

se definisco $f: R \to R$ NON E' SURIETTIVA perché l'insieme di arrivo contiene anche numeri negativi che non han= no controimmagini in A.

se definisco $f: R \to R^+$ è suriettiva tutti gli elementi positivi di B hanno almeno una controimmagine in A -

---

COME DETERMINARE L'INVERSA DI UNA FUNZIONE

ES $f(x) = y = 2x - 1$ ← E' UNA RETTA $\quad f: R \longrightarrow R$

Devo ricavare la x in funzione di y -

Isolo la x: trasporto i valori da una parte all'altra dell'=

$$-2x = -y - 1 \qquad \text{CAMBIO I SEGNI}$$

$$2x = y + 1 \qquad \text{DIVIDO ENTRAMBI I MEMBRI PER 2}$$

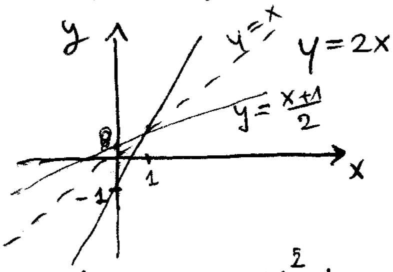
$$x = \frac{y+1}{2}$$

Poiché di solito le funzioni sono scritte $y = f(x)$ SCAMBIO la x con la y

FUNZIONE INVERSA $\boxed{y = \frac{x+1}{2}} \to f^{-1}(x) = y$

FUNZIONE INVERSA $f^{-1}: R \to R$

FUNZIONE INVERSA

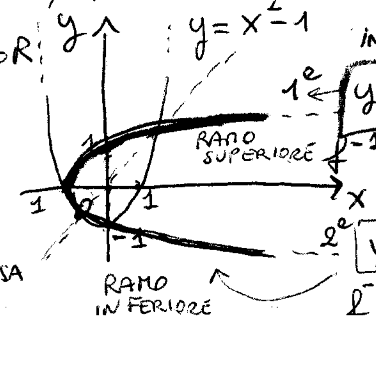


N.B. IL GRAFICO DI OGNI FUNZIONE INVERSA E' SIMMETRICO RISPETTO ALLA RETTA $y = x$.

ES: $y = x^2 - 1$ PARABOLA, NON E' INIETTIVA SU TUTTO IL SUO DOMINIO R; e quindi NON E' INVERTIBILE, se provo a invertirla trovo 2 INVERSE:

$$-x^2 = -y - 1 \to x^2 = y + 1 \to x = \pm\sqrt{y+1}$$

SCAMBIO x/y $\to y = \begin{cases} +\sqrt{x+1} \\ -\sqrt{x+1} \end{cases}$ $\boxed{x \geq -1}$ ← DOMINIO DELL'INVERSA



INVERSA 1° $\boxed{y = \sqrt{x+1}}$

$f^{-1}: [-1, +\infty) \to R^+$

INVERSA 2° $\boxed{y = -\sqrt{x+1}}$

$f^{-1}: [-1, +\infty) \to R^-$