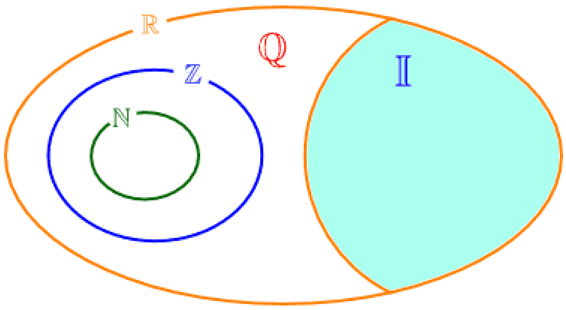
Radici e radicali

DEF1 Chiamiamo **numero irrazionale**[1] un numero che può essere rappresentato da un numero decimale illimitato aperiodico[2]. Indichiamo con $\mathbb{I}$ l'insieme dei numeri irrazionali.

ES. $\sqrt{3} = 1.7320508075688772935274463415...$ (irrazionale algebrico)

$\pi = 3.14159265358979323846264338327 9...$ (irrazionale trascendente)

DEF2 Chiamiamo **numero reale** un numero che sia razionale o irrazionale. Indichiamo con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.



Il simbolo $\sqrt[n]{a}$ indica la **radice n-esima** (*ennesima*) di *a*. Il numero *a* (*numero reale*) è detto **radicando**. Il numero *n* (*numero naturale*) è detto **indice della radice**.

DEF3 $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$. A parole: si dice radice *ennesima* di un numero reale *a*, se esiste, quel numero reale *b* che elevato a *n* dà *a*.

Condizioni di esistenza di una radice n-esima e sue caratteristiche

Se l'indice è **dispari**, la radice è definita per qualunque valore del radicando, è unica e ha lo stesso segno del radicando.

In simboli: se *n=2h+1*➔ $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}; \exists!\, b|(b \in \mathbb{R} \wedge b^n = a)$

ES $\sqrt[3]{-8} = -2$ infatti $(-2)^3 = 8$; $\sqrt[3]{27} = 3$ infatti $3^3 = 27, ecc.$

Se l'indice è **pari**, la radice è un numero reale se e soltanto se il radicando è positivo. Inoltre la radice non è unica ma ci sono due valori opposti che verificano la definizione.

DEF3.1 Il valore positivo, di una radice con indice pari, si dice **radice algebrica**.

In simboli: se *n=2h*➔ $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+; \exists(+b,-b)|b \in \mathbb{R}^+, (-b)^n = (+b)^n = a.$

ES $\sqrt{4} = \pm 2$, infatti $(+2)^2 = (-2)^2 = 4$; $\sqrt[4]{81} = \pm 3$ infatti $(+3)^4 = (-3)^4; ecc.$

Consideriamo solo la **radice algebrica**, per esempio, quando calcoliamo la misura di segmenti (applicando i Teoremi di Pitagora o Euclide).

Consideriamo entrambe le radici, per esempio, quando risolviamo un'**equazione di secondo grado**.

---

[1] **Irrazionale** significa **non razionale**, cioè non rappresentabile con una frazione (*ratio*, in latino, significa *rapporto*: uno dei tanti significati del concetto di frazione). Abbiamo visto a lezione una dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$. Puoi rivederla qui: https://www.youtube.com/watch?v=9Cgh-UzjvDQ .

[2] **Aperiodico** significa senza un periodo: i numeri dopo la virgola si ripetono senza una regolarità riscontrabile.

Notazione esponenziale per le radici

Osserviamo che se scriviamo $a^{\frac{1}{n}}$, invece di $\sqrt[n]{a}$, la definizione viene rispettata infatti: $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a$ (applicando la proprietà di potenza di potenza).

Con questa notazione otteniamo il grande vantaggio di poter considerare l'*estrazione di radice* (l'operazione sottintesa dalla definizione di radice) come caso particolare dell'elevamento a potenza e quindi di poter applicare tutte le proprietà delle potenze alle operazioni tra radici – *mutatis mutandis*.

Prima di passare in esame alcune delle possibili operazioni tra radici, ricapitoliamo la situazione delle operazioni tra numeri finora studiate:

<table>
<tr><th>In N</th><th>In Z</th><th>In Q</th><th>In R</th></tr>
<tr><td>Addizione</td><td colspan="3" rowspan="2">Addizione algebrica</td></tr>
<tr><td>Sottrazione</td></tr>
<tr><td>Moltiplicazione</td><td></td><td colspan="2" rowspan="2">Moltiplicazioni tra frazioni</td></tr>
<tr><td>Divisione</td><td></td></tr>
<tr><td>Elevamento a potenza</td><td></td><td></td><td rowspan="2">Potenza a esponente razionale</td></tr>
<tr><td>Estrazione di radice</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Quindi, mentre lavorando in **N** (cioè facendo operazioni con naturali che abbiano risultati naturali) abbiamo a che fare con sei diversi tipi di operazione, lavorando in **R** le operazioni si riducono a tre.

DEF4 Un'espressione del tipo: $k \cdot \sqrt[n]{A}$ si chiama **radicale**. *k* si chiama coefficiente del radicale. Per *k=1* ritroviamo le radici ennesime. Ho indicato il radicando con la lettera maiuscola perché può essere un numero, un polinomio, una frazione algebrica, ecc.

Per semplicità, per ora ci occuperemo solo di casi con radicando numerico.

Operazioni con i Radicali

Per fare le operazioni con i radicali che ci interessano, devi mettere assieme le conoscenze sulle operazioni con monomi e le proprietà delle potenze

DEF5 Due radicali si dicono **simili** se hanno lo stesso indice e lo stesso radicando.

DEF6 La **somma** algebrica di radicali simili è un radicale che ha: per indice e per radicando gli stessi degli addendi e per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

ES $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$; $-2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = -7\sqrt{3}$; $2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$; $-2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = +3\sqrt{3}$

Se i radicali non sono simili (cioè se hanno indice differente o radicando differente) al massimo si può fare un raccoglimento a fattor comune tra i coefficienti, se hanno un MCD diverso da 1:

CONTRES $7\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[4]{2}$; $4\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$; $24\sqrt{7} - 32\sqrt[3]{11} = 8(3\sqrt{7} - 4\sqrt[3]{11})$.

DEF7 Il **prodotto** di radicali con stesso indice è un radicale che ha: per indice lo stesso indice, per radicando il prodotto dei radicandi e per coefficiente il prodotto dei coefficienti.

Infatti il prodotto di radicali con lo stesso indice è assimilabile al prodotto di potenze con lo stesso esponente. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$. Ai coefficienti, invece, non si fa che applicare le proprietà associativa e commutativa della moltiplicazione.

ES $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$; $\sqrt[3]{\frac{12}{25}} \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{6}} = \sqrt[3]{\frac{12}{25} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$ $\quad \frac{8}{11}\sqrt[5]{10} \cdot \frac{33}{28}\sqrt[5]{5} = \frac{6}{7}\sqrt[5]{50}$.

Se i radicali non hanno stesso indice al massimo si possono moltiplicare i coefficienti.

CONTRES $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}$; $\quad \frac{3}{4}\sqrt[5]{5} \cdot \frac{4}{3}\sqrt[3]{7} = \sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[3]{7}$.

[Caso a parte quando gli indici sono differenti ma i radicandi o sono uguali o, scomposti in fattori primi, hanno gli stessi fattori. Se sei curiosa/o prova a studiare questo caso].

Analogamente si ragiona per il **quoziente** di radicali simili. Oppure (meglio!) non ci si pone proprio il problema ricordando che in **R** moltiplicazione e divisione non sono distinte ma sono due facce della stessa operazione.

DEF8 La **potenza** a esponente intero di un radicale è un radicale che ha per coefficiente la potenza del coefficiente, per indice lo stesso indice e per radicando la potenza del radicando.

Attenzione: la **potenza** a esponente intero di un radicale può essere considerata come un'*iterazione* del prodotto (come nella definizione) o come potenza di potenza (usando la notazione esponenziale): $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$. Questo secondo modo è comodo quando l'esponente *p* è divisibile per l'indice *n*. O quando hanno divisori comuni.

ES $(2\sqrt[7]{5})^2 = 4\sqrt[7]{5^2}$; $\quad (\sqrt[3]{2})^6 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6 = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2$; $\quad (\sqrt[18]{5})^{12} = \left(5^{\frac{1}{18}}\right)^{12} = 5^{\frac{12}{18}} = 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$.

Portare un fattore dentro o fuori dal segno di radice

Le operazioni indicate sono un'applicazione del prodotto di radici con lo stesso indice e sono operazioni inverse tra loro. Se capisci una delle due, capirai anche l'altra.

ES $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$ perché: $3\sqrt{5} = 3^{\frac{2}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = (3^2 \cdot 5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{45}$

In generale, per ***portar dentro***: $\quad a^k \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{k \cdot n} \cdot b}$.

Quindi si può portare un coefficiente positivo dentro al segno di radice sempre. Se il coefficiente è negativo, potrà essere portato dentro solo a radici di indice dispari.

ES1 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ perché: $\sqrt{8} = (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{2+1}{2}} = 2^{\frac{2}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

ES2 $\sqrt[3]{162} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^4} = 3\sqrt[3]{6}$; $\sqrt{432} = \sqrt{2^4 \cdot 3^3} = 2^{\frac{4}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

In generale, per ***portar fuori***: $\quad \sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{k \cdot n+1}{n}} = a^{\frac{k \cdot n}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^k \sqrt[n]{a}$.

Quindi si può portare un radicando, o una sua parte, fuori dal segno di radice se e solo se, ridotto in fattori primi, ha fattori con esponenti maggiori o uguali all'indice.

Razionalizzazione

https://it.wikipedia.org/wiki/Razionalizzazione_(matematica)