Studio di Funzione

Cosa significa studiare una funzione?
Significa ricercare alcune caratteristiche della funzione, che, considerate assieme, consentono di rappresentare la funzione stessa con un grafico sul piano cartesiano.
Dopo aver classificato la funzione, le caratteristiche da ricercare, cui ci riferiamo, sono:
1) Il dominio della funzione.
2) Gli eventuali asintoti.
3) Le eventuali intersezioni con gli assi.
4) Segno della funzione.
5) I rami crescenti e decrescenti.
6) I punti di massimo e di minimo relativo.
7) La concavità e la convessità.

1)Il dominio della funzione (detto anche **campo di esistenza (C.E.))**
Si dice campo di esistenza (C.E.) o dominio di definizione (D) l'insieme dei valori che si possono attribuire alla variabile indipendente **x** affinché la funzione **y** assuma valori reali e non perda significato.

Ricordati che stiamo studiando la *funzione reale di variabile reale*: cioè dominio e codominio sono sottoinsiemi dell'insieme R dei numeri reali.
Una funzione reale consiste in una relazione tra la ***x*** (variabile indipendente o argomento della funzione) e la ***y***(variabile dipendente) tale che ***y = f(x)***. La ***y*** deve sempre risultare reale.

Che significa cercare il campo di esistenza o dominio di definizione della funzione?
Significa cercare i valori che si possono dare alla **x** affinché esista il corrispondente valore della **y**. Ciò consente di fissare in corrispondenza di quali valori di x si deve tracciare il grafico.

Come cercare il dominio?

1)Se la funzione e' RAZIONALE INTERA il dominio risulta costituito da ogni valore di x appartenente all'insieme dei numeri reali. Puoi scrivere:

$$D = R \text{ oppure } D = \{ \forall x \in \Re \}$$

2)Se la funzione e' RAZIONALE FRATTA il dominio si ottiene ponendo il denominatore diverso da zero. Il dominio è costituito da ogni valore di x appartenente all'insieme dei numeri reali ad esclusione dei valori c che annullano il denominatore. Si indicherà:

$$D = R - \{c\} \text{ oppure } D = \{ \forall x \in \Re \ / \ x \neq c\}$$

3)Se la funzione e' IRRAZIONALE INTERA(FRATTA) con indice del radicale dispari allora il dominio e' come quello delle RAZIONALI INTERE(FRATTE)
4)Se la funzione e' IRRAZIONALE INTERA con indice del radicale pari allora si impone al radicando d'essere positivo o nullo
5)Se la funzione e' IRRAZIONALE FRATTA con indice del radicale pari,allora si impone al radicando d'essere positivo o nullo.

Osservazione
Se una funzione è composta da più funzioni, il suo dominio sarà l'intersezione dei domini delle funzioni componenti (praticamente sarà la soluzione del sistema formato da tutte le condizioni di esistenza delle funzioni componenti).

2)Asintoti

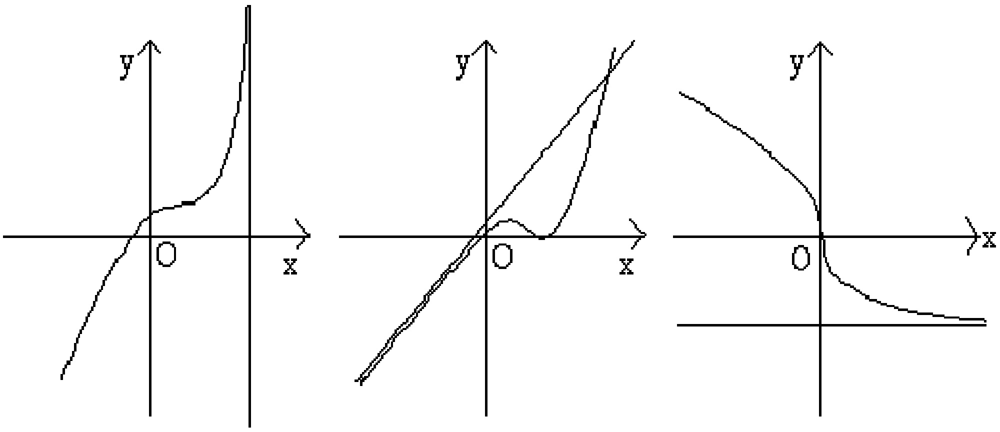
Si definisce ASINTOTO di una funzione una retta alla quale la curva rapppresentativa della funzione si avvicina senza mai toccarla ad eccezione degli asintoti orizzontali o obliqui che possono anche incontrare la curva. Si dice anche che l'asintoto e' la tangente all'infinito della funzione.

Determinazione degli asintoti

Determinare gli asintoti vuol dire studiare il comportamento della funzione agli estremi del dominio

Esistono tre tipi di asintoti :

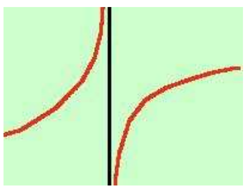
verticale obliquo orizzontale



Asintoti verticali

Si calcola il limite della funzione per x che tende al valore che non appartiene al dominio.
Cioè, se $c \notin D$, calcoliamo $\lim_{x \to c} f(x)$.

Se $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ si dice che la retta ***x=c*** rappresenta un **asintoto verticale** per la curva.

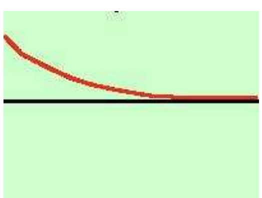


Asintoti orizzontali

Si calcola il $\lim_{x \to \infty} f(x)$

Se risulta $\lim_{x \to \infty} f(x) = k$ (k è un valore finito)

si dice che la retta ***y=k*** rappresenta un **asintoto orizzontale** per la curva.
Se invece è $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ diremo che non esistono asintoti orizzontali.



Asintoti obliqui

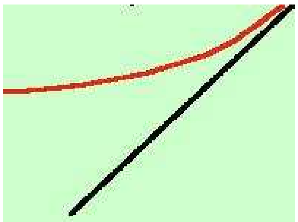
Si ricordi che una qualunque retta del piano ha equazione:
$y = mx + q$
Il valore di m si ottiene nel seguente modo:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

Se m = ∞ o m = 0 non esiste asintoto obliquo. Se m = h (valore finito) calcoliamo q.
Il valore di *q* si ottiene calcolando:

$$q = \lim_{x \to \infty} [\, f(x) - mx]$$

Se q = valore finito esiste l'asintoto obliquo di equazione y = mx + q



RICORDA CHE

►Una FUNZIONE RAZIONALE INTERA
- non ammette asintoti di alcun genere.

►Una FUNZIONE RAZIONALE FRATTA:
- ha tanti asintoti verticali quanti sono i valori di x che annullano il denominatore,cioè quanti sono i valori di x che non appartengono al dominio. Quindi, se la funzione è definita $\forall x \neq c$, la retta di equazione x = c è asintoto verticale.
- ha per asintoto orizzontale la retta di equazione y=0(asse delle ascisse), se il grado del numeratore è minore del grado del denominatore;
- ha per asintoto orizzontale la retta di equazione y = h, se il grado del numeratore e' uguale a quello del denominatore (h risulta il rapporto dei coefficienti di grado maggiore tra numeratore e denominatore);
- non ha asintoti orizzontali se il grado del numeratore e' maggiore di quello del denominatore.In tal caso esiste l'asintoto obliquo.

N.B. - Se esiste l'asintoto orizzontale ⇒ non esiste l'asintoto obliquo.
- Gli asintoti orizzontali o obliqui si cercano se il dominio è un insieme non limitato.
- Un asintoto obliquo od orizzontale può avere punti di intersezione con la curva. In particolare,una qualsiasi funzione non puo' incontrare MAI gli asintoti verticali poiche' se x=l e' un asintoto verticale allora x=l e' un punto di discontinuita' della funzione. Possono invece esistere intersezioni tra gli asintoti orizzontali oppure obliqui con la funzione.Per trovare queste eventuali intersezioni basta fare il sistema tra la curva e i rispettivi asintoti.

3)<u>Le intersezioni con gli assi</u>
Gli assi cartesiani ***x*** e ***y*** sono caratterizzati dal fatto che il loro punti hanno rispettivamente ordinata nulla e ascissa nulla, quindi le loro equazioni sono ***y=0*** e ***x=0***.
Per determinare le eventuali intersezioni:
1) <u>con l'asse **y**</u> si pone nella funzione ***x=0 (***se il valore zero appartiene al C.E.)
2) <u>con l'asse **x**</u> si pone nella funzione ***y=0*** e si risolve l'equazione ***f(x)=0.***

4)<u>Segno della funzione</u>
Lo studio del **segno**di f(x) consente di fissare in corrispondenza di quali valori di x il grafico sta al di sopra dell'asse delle ascisse (ovvero, dove la funzione assume valori positivi) e in corrispondenza di quali al di sotto (ovvero, dove la funzione è negativa)
In questo caso si tratta semplicemente di impostare e risolvere la disequazione: $f(x) > 0$.
Risolta tale disequazione si ottengono gli intervalli della x in cui la funzione e' positiva e nello stesso tempo si trovano gli intervalli in cui la funzione e' negativa.
Fatto questo passaggio necessita fissare il sistema di assi cartesiani e porre in essi i primi risultati ottenuti precedentemente per poter gia' iniziare la rappresentazione grafica della funzione considerata.