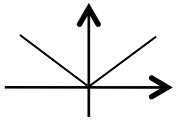
EQUAZIONI E DISEQUAZIONI IN VALORE ASSOLUTO

Def: $|x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$ Grafico 

Es: $|-5| = -(-5) = 5$, $|+5| = 5$, $|0| = 0$

Pertanto: $|x| > 0$ per $x \neq 0$ e $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \Re$;

$|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \vee a = -b \quad a, b \in \Re$

Due numeri reali sono uguali in valore assoluto o quando sono uguali o quando sono opposti

---

1° caso: Equazioni con 1 valore ass.

$$|A(x)| = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x) \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) = B(x) \end{cases}$$

In particolare se $B(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$

$|f(x)| = k \Leftrightarrow$ impossibile se $k < 0$, $S = \phi$

(il valore assoluto è sempre non negativo)

$|f(x)| = k \Leftrightarrow f(x) = 0$ se $k = 0$

$|f(x)| = k \Leftrightarrow f(x) = \pm k$ se $k \geq 0$

Esempio: $|x^2 - 3| = 1$ k=1 >0

Metodo veloce: $x^2 - 3 = \pm 1$

da cui:

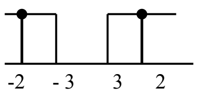
$x^2 - 3 = 1 \vee x^2 - 3 = -1$ le cui soluzioni sono $x = \pm 2 \vee x = \pm\sqrt{2}$

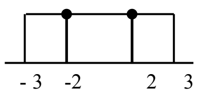
Oppure metodo più lungo, che vale in generale anche quando invece di 1 a destra di = c'è una variabile x

$$\begin{cases} x^2 - 3 \geq 0 \\ x^2 - 3 = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 - 3 < 0 \\ -x^2 + 3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -\sqrt{3} \vee x \geq \sqrt{3} \\ x = \pm 2 \end{cases} \cup \begin{cases} -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\}$$





Esempio: $\left|1 + \frac{2}{x}\right| = x \quad C.E.\ x \neq 0$

$$\begin{cases} 1 + \frac{2}{x} \geq 0 \\ 1 + \frac{2}{x} = x \end{cases} \cup \begin{cases} 1 + \frac{2}{x} < 0 \\ -1 - \frac{2}{x} = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+2}{x} \geq 0 \\ \frac{x+2}{x} = \frac{x^2}{x} \end{cases} \cup \begin{cases} \frac{x+2}{x} < 0 \\ \frac{-x-2}{x} = \frac{x^2}{x} \end{cases}$$

Risolvendo separatamente la disequazione e l'equazione:

$$\begin{cases} x \leq -2 \vee x > 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -2 < x < 0 \\ x^2 + x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ x = 2, x = -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x < -2 \vee x > 0 \\ \Delta < 0, imp.\ in\ R \end{cases}$$

N.B.
si accetta la soluzione che è nell'intervallo individuato.
E' accettabile x=2 nel primo sistema, il secondo sistema è impossibile.

$$S = \{2\}$$

2° caso: Equazioni con 2 valori assoluti

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x)$$

ossia: *f(x)=g(x)* $\vee$ *f(x)=-g(x)*

Esempio: $|x - 2| = |3 - 2x| \quad \rightarrow$

$x - 2 = 3 - 2x \quad \vee \quad x - 2 = -3 + 2x$

$S = \{ x = 5/3,\ x = 1\}$

1° caso disequazioni con 1 valore assol.

$$|A(x)| < B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) < B(x) \\ A(x) > -B(x) \end{cases}$$

il sistema si traduce anche con la scrittura:

$$-B(x) < A(x) < B(x)$$

Il sistema sopra si trova facendo l'unione dei due sistemi qui sotto:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) < B(x) \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) < B(x) \end{cases}$$

Se il membro destro è un numero reale *k*, nel caso $k \leq 0$ la soluzione è immediata:

$$|f(x)| < k$$

se $k > 0$ $\begin{cases} f(x) < k \\ f(x) > -k \end{cases}$ ossia $-k < f(x) < k$

se $k < 0 \quad S = \varnothing$

se $k = 0 \quad S = \varnothing$

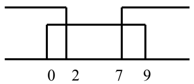
(N.B: il valore assoluto è una funzione non negativa e non può essere minore di un numero negativo).

Esempio: $|x^2 - 9x + 7| < 7$

$$S_1 = \{x = 0\ \cup 3 \leq x \leq 5\}$$

$$\begin{cases} x^2 - 9x + 7 < 7 \\ x^2 - 9x + 7 > -7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 9x < 0 \\ x^2 - 9x + 14 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 9 \\ x < 2 \quad \vee \quad x > 7 \end{cases}$$



$S = (0, 2) \cup (7, 9)$

Casi particolari:

$|3x + 1| < 0 \qquad S = \varnothing$

$|3x + 1| \leq 0 \qquad x = -1/3$

$|x - 3| < -4 \qquad S = \varnothing$

$|x - 3| \leq -4 \qquad S = \varnothing$

Esempio: $|x^2 - 3x| \leq 2x$

Imposto i due sistemi:

$$S_1 \begin{cases} x^2 - 3x \geq 0 \\ x^2 - 3x \leq 2x \end{cases} \cup S_2 \begin{cases} x^2 - 3x < 0 \\ -x^2 + 3x \leq 2x \end{cases}$$

Li risolvo separatamente e poi trovo $S_1 \cup S_2$

$$\begin{cases} x \leq 0 \quad \vee \quad x \geq 3 \\ 0 \leq x \leq 5 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < x < 3 \\ x \leq 0 \quad \vee \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Dopo aver fatto i grafici di sistema di S_1 e di S_2 (separatamente) trovo le soluzioni

$$S_1 = \{x = 0\ \cup 3 \leq x \leq 5\}$$

$$S_2 = \{1 \leq x < 3\}$$

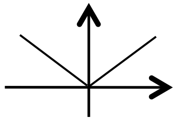
La soluzione finale sarà: S= $S_1 \cup S_2$, faccio il grafico dell'unione:

Ossia:

$$S = \{x = 0\ \cup 1 \leq x \leq 5\}$$

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI IN VALORE ASSOLUTO

Def: $|x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$ Grafico



Es: $|-5| = -(-5) = 5$, $|+5| = 5$, $|0| = 0$

Pertanto: $|x| > 0$ per $x \neq 0$ e $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \Re$;

$|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \vee a = -b \quad a, b \in \Re$

Due numeri reali sono uguali in valore assoluto o quando sono uguali o quando sono opposti

2° caso disequazioni

$$|A(x)| > B(x) \Leftrightarrow$$
$$A(x) < -B(x) \ \vee \ A(x) > B(x)$$

L'unione delle due condizioni sopra si trova facendo l'unione dei due sistemi qui sotto:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) > B(x) \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) > B(x) \end{cases}$$

Se il membro destro è un numero reale *k*, nel caso $k \leq 0$ la soluzione è immediata:

$$|f(x)| > k$$

se $k > 0$ $\quad f(x) < -k \vee f(x) > k$

se $k < 0$ $\quad \forall x \in \Re$

se $k = 0$ $\quad \forall x \in \Re$, $f(x) \neq 0$

Esempio: $|3x - 2| > 1$ metodo veloce

$$3x - 2 > 1 \quad \vee \quad 3x - 2 < -1$$
$$x < 1/3 \quad \vee \quad x > 1$$

Casi particolari:

$|3x+1| \geq 0 \qquad \forall x \in \Re$

$|3x+1| > 0 \qquad \forall x \neq -1/3$

$|x^2 - 2| > -1 \qquad \forall x \in \Re$

$|x^2 - 2| \geq -1 \qquad \forall x \in \Re$

Esempio: $|2x - 1| > 3x$

Il metodo più lungo:

$$S_1: \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 > 3x \end{cases} \cup S_2: \begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ -2x + 1 > 3x \end{cases}$$

$$S_1: \begin{cases} x \geq 1/2 \\ x < -1 \end{cases} \cup \quad S_2: \begin{cases} x < 1/2 \\ x < 1/5 \end{cases}$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x < 1/2\}$$

Il metodo più veloce (consigliato):

$$2x - 1 < -3x \ \vee \ 2x - 1 > 3x$$

risolvendo e unendo le soluzione trovo x<1/2

3° caso: somma di due valori assoluti

$|A(x)| + |B(x)| > 0 \quad \forall x \in \Re$ tranne che per i valori che annullano contemporaneamente *A(x)* e *B(x)*

$|A(x)| + |B(x)| \geq 0 \quad \forall x \in \Re$

$|A(x)| + |B(x)| < 0 \quad S = \varnothing$

$|A(x)| + |B(x)| \leq 0$ per A(x)=0 $\wedge$ B(x)=0

Esempio:

$|x^2 - 4| + |x - 2| > 0 \quad x \neq \pm 2,\ x \neq 2$ e

quindi S=$\Re - \{2\}$

Caso generale

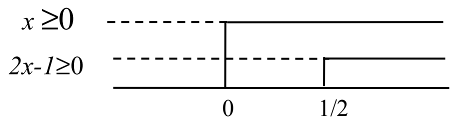
Quando una disequazione presenta diversi valori assoluti, bisogna:

- Numerare i valori assoluti
- studiare il segno delle espressioni contenute all'interno di essi;
- costruire un grafico in cui vengono riportati i segni di tali espressioni;
- per ciascuno degli intervalli che si vengono a creare, si riscrive la disequazione tenendo conto del grafico dei segni e si risolve;
- l'insieme delle soluzioni è dato dall'unione delle soluzioni dei sistemi di disequazioni

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \ldots \cup S_3$$

Esempio: $|x| + 3 = |2x - 1|$

Prima si determina per quali valori gli argomenti dei due moduli sono positivi e si fa un grafico dei segni.



Dallo schema si distinguono tre casi: (sistemi misti)

$$S_1: \begin{cases} x \leq 0 \\ -x + 3 = -2x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} 0 < x \leq 1/2 \\ x + 3 = -2x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1/2 \\ x = -2/3 \end{cases}$$

$$S_3: \begin{cases} x > 1/2 \\ x + 3 = 2x - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1/2 \\ x = -4 \end{cases}$$

S_1: x=-2 accettabile
S_2 : x=-2/3 non è accettabile.
S_3 : x=-4 non è accettabile

La soluzione è l'unione delle soluzioni dei tre sistemi misti, in questo caso

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{-2\}$$