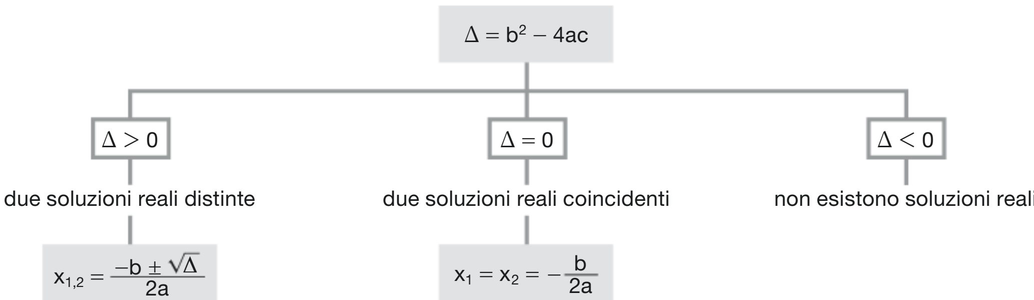
TEORIA IN SINTESI

RICHIAMI DI ALGEBRA

Le equazioni di secondo grado

Un'equazione di secondo grado è riconducibile alla forma normale: $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$

- $b = 0,\ c \neq 0$ (equazione pura) $\to ax^2 + c = 0 \to x^2 = -\frac{c}{a}$
  - se $-\frac{c}{a} < 0$: impossibile
  - se $-\frac{c}{a} > 0$: $\to x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$
- $c = 0,\ b \neq 0$ (equazione spuria) $\to ax^2 + bx = 0 \to x(ax + b) = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$
- $b = c = 0$ (equazione monomia) $\to ax^2 = 0 \to x_1 = x_2 = 0$
- $b \neq 0,\ c \neq 0$ (equazione completa). Il discriminante è $\Delta = b^2 - 4ac$.



Formula ridotta: b pari $\to x_{1,2} = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}$.

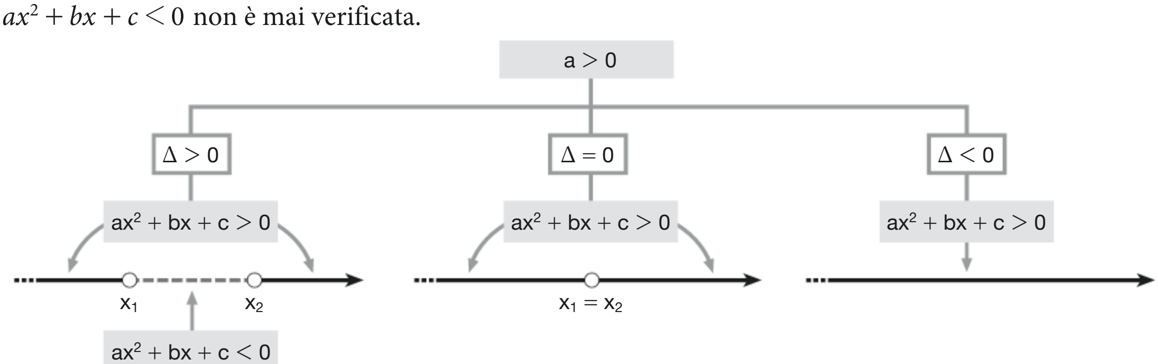
Le disequazioni di secondo grado

Per risolvere le disequazioni $ax^2 + bx + c > 0$ e $ax^2 + bx + c < 0$ (con $a > 0$), si considera l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$.

Se $\mathbf{\Delta > 0}$, la disequazione:
- $ax^2 + bx + c > 0$ è verificata dai valori esterni all'intervallo individuato dalle radici dell'equazione associata;
- $ax^2 + bx + c < 0$ è verificata dai valori interni.

Se $\mathbf{\Delta = 0}$, la disequazione:
- $ax^2 + bx + c > 0$ è sempre verificata tranne che per il valore della radice doppia dell'equazione associata;
- $ax^2 + bx + c < 0$ non è mai verificata.

Se $\mathbf{\Delta < 0}$, la disequazione:
- $ax^2 + bx + c > 0$ è sempre verificata;
- $ax^2 + bx + c < 0$ non è mai verificata.



Le equazioni e le disequazioni con il valore assoluto

$|A(x)| = k$
- se $k < 0$: non ha soluzione
- se $k \geq 0$: $A(x) = \pm k$

$|A(x)| < k$
- se $k > 0$: $-k < A(x) < k \rightarrow \begin{cases} A(x) > -k \\ A(x) < k \end{cases}$
- se $k \leq 0$: non ha soluzione

$|A(x)| > k$
- se $k > 0$: $A(x) < -k \vee A(x) > k$
- se $k = 0$: $A(x) \neq 0$
- se $k < 0$: sempre verificata

Le equazioni e le disequazioni irrazionali

$\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$
- se n è dispari: $A(x) = [B(x)]^n$
- se n è pari: $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^n \end{cases}$

$\sqrt[n]{A(x)} < B(x)$
- se n è dispari: $A(x) < [B(x)]^n$
- se n è pari: $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^n \end{cases}$

$\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$
- se n è dispari: $A(x) > [B(x)]^n$
- se n è pari: $\begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^n \end{cases}$

Le proprietà delle potenze

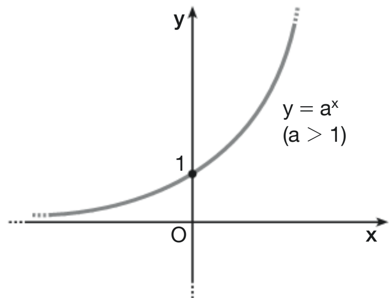
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$ con $a \neq 0$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
- $a^m : b^m = (a : b)^m$ con $b \neq 0$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ con $a \neq 0$

I prodotti notevoli e la scomposizione in fattori

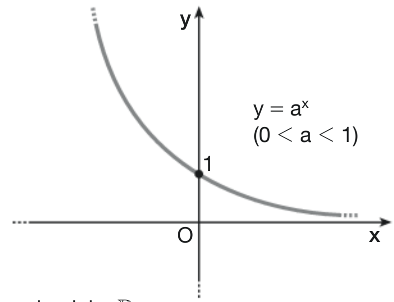
- $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
- $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$
- $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$
- $(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$
- $A^3 \pm B^3 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$

FUNZIONE ESPONENZIALE E FUNZIONE LOGARITMO

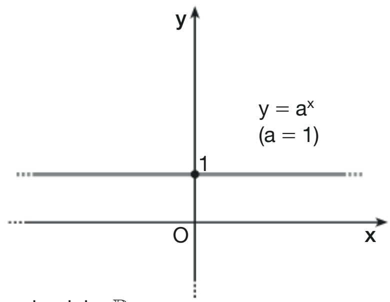
La funzione esponenziale



- dominio: $\mathbb{R}$;
- codominio: $\mathbb{R}^+$;
- funzione crescente in $\mathbb{R}$;
- corrispondenza biunivoca;
- $a^x \to 0$ per $x \to -\infty$.
- $a^x \to +\infty$ per $x \to +\infty$.

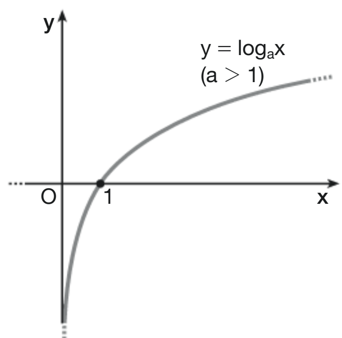


- dominio: $\mathbb{R}$;
- codominio: $\mathbb{R}^+$;
- funzione decrescente in $\mathbb{R}$;
- corrispondenza biunivoca;
- $a^x \to 0$ per $x \to +\infty$.
- $a^x \to +\infty$ per $x \to -\infty$.

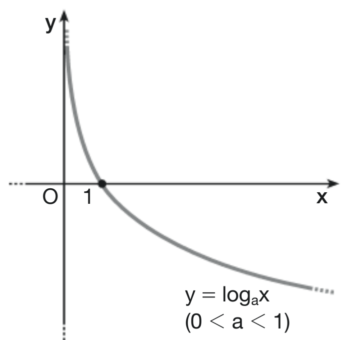


- dominio: $\mathbb{R}$;
- codominio: {1};
- funzione costante;
- funzione non iniettiva.

La funzione logaritmo



- dominio: $\mathbb{R}^+$;
- codominio: $\mathbb{R}$;
- funzione crescente in $\mathbb{R}^+$;
- corrispondenza biunivoca;
- $\log_a x \to -\infty$ per $x \to 0$;
- $\log_a x \to +\infty$ per $x \to +\infty$.



- dominio: $\mathbb{R}^+$;
- codominio: $\mathbb{R}$;
- funzione decrescente in $\mathbb{R}^+$;
- corrispondenza biunivoca;
- $\log_a x \to +\infty$ per $x \to 0$;
- $\log_a x \to -\infty$ per $x \to +\infty$.

Logaritmo di un prodotto

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c, \; (b > 0, c > 0)$$

Logaritmo di un quoziente

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \quad (b > 0, c > 0)$$

Logaritmo di una potenza

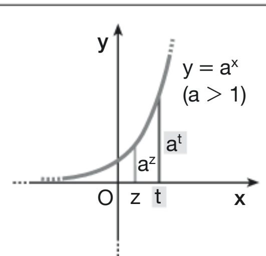
$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b, \qquad (b > 0, n \in \mathbb{R})$$

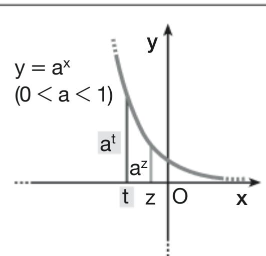
Cambiamento di base nei logaritmi

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad a > 0, b > 0, c > 0 \quad a \neq 1, c \neq 1$$

Disequazioni esponenziali

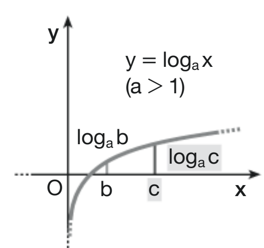
$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^t > a^z \;\Leftrightarrow\; t > z$	$a^t > a^z \;\Leftrightarrow\; t < z$

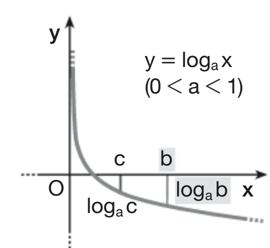




Disequazioni logaritmiche

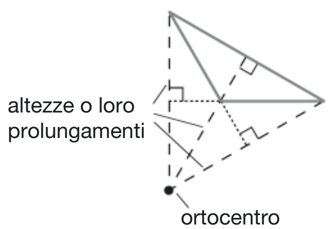
$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a b < \log_a c \;\Leftrightarrow\; b < c$	$\log_a b < \log_a c \;\Leftrightarrow\; b > c$

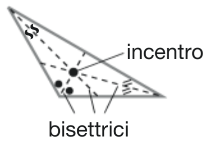




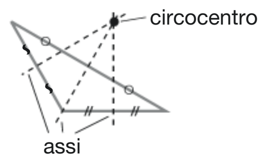
RICHIAMI DI GEOMETRIA

I punti notevoli di un triangolo

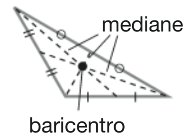




L'incentro è il centro della circonferenza inscritta.



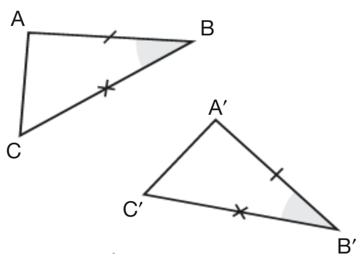
Il circocentro è il centro della circonferenza circoscritta.



Il baricentro divide ogni mediana in due parti di cui quella contenente il vertice è doppia dell'altra

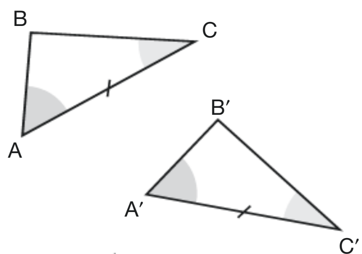
I criteri di congruenza dei triangoli

1° criterio



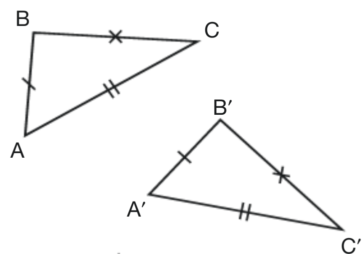
$$\left.\begin{array}{l}AB \cong A'B' \\ BC \cong B'C' \\ \widehat{B} \cong \widehat{B'}\end{array}\right| \rightarrow ABC \cong A'B'C'$$

2° criterio



$$\left.\begin{array}{l}AC \cong A'C' \\ \widehat{A} \cong \widehat{A'} \\ \widehat{C} \cong \widehat{C'}\end{array}\right| \rightarrow ABC \cong A'B'C'$$

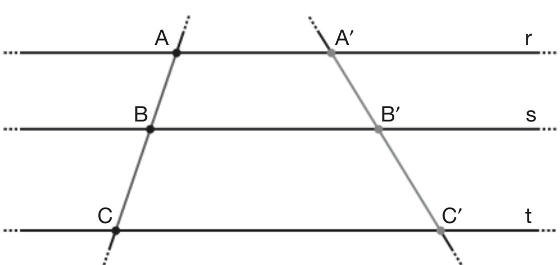
3° criterio



$$\left.\begin{array}{l}AB \cong A'B' \\ BC \cong B'C' \\ AC \cong A'C'\end{array}\right| \rightarrow ABC \cong A'B'C'$$

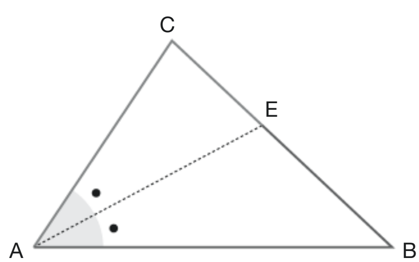
Il teorema di Talete

Teorema di Talete



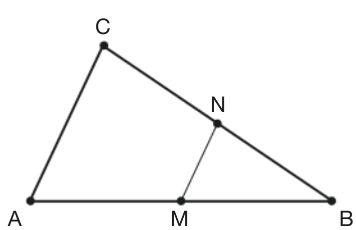
$r \parallel s \parallel t \Rightarrow AB : BC = A'B' : B'C'$

Teorema della bisettrice di un angolo interno di un triangolo



$BE : CE = AB : AC$

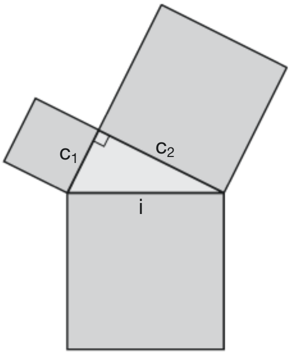
Conseguenza del teorema di Talete



$$\left.\begin{array}{l}AM \cong MB \\ CN \cong NB\end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{l}MN \parallel AC \\ MN \cong \dfrac{1}{2}AC\end{array}$$

L'equivalenza e la similitudine

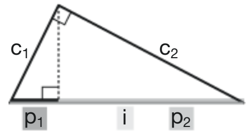
Il teorema di Pitagora



$$c_1^2 + c_2^2 = i^2$$

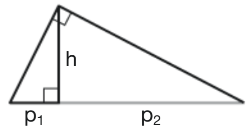
I teoremi di Euclide

- **Primo teorema di Euclide**



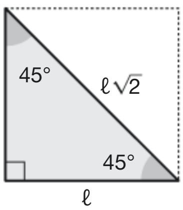
$$i : c_1 = c_1 : p_1$$
$$i : c_2 = c_2 : p_2$$

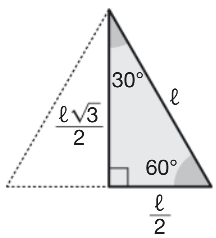
- **Secondo teorema di Euclide**



$$p_1 : h = h : p_2$$

Relazioni fra i lati di triangoli notevoli

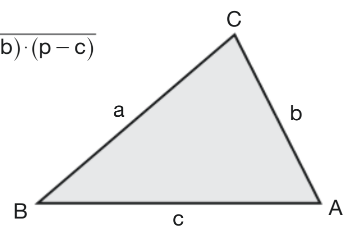




Formula di Erone

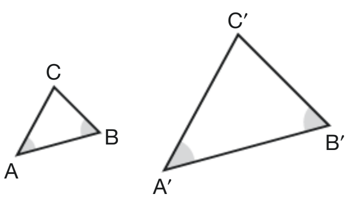
$$\mathcal{A} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

con $p = \dfrac{a+b+c}{2}$



Criteri di similitudine dei triangoli

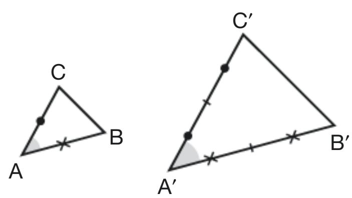
1° criterio



$\widehat{A} \cong \widehat{A'}$ $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$

$ABC \approx A'B'C'$

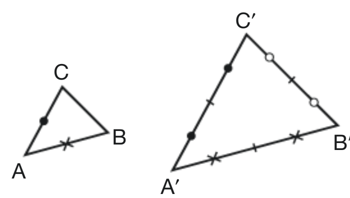
2° criterio



$\widehat{A} \cong \widehat{A'}$ $AB : A'B' = AC : A'C'$

$ABC \approx A'B'C'$

3° criterio

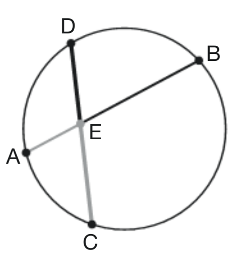


$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$

$ABC \approx A'B'C'$

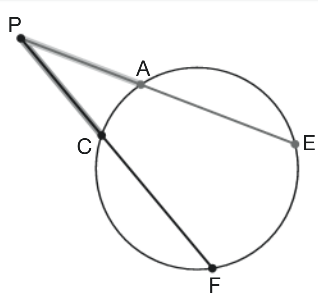
La similitudine nella circonferenza

Teorema delle corde secanti



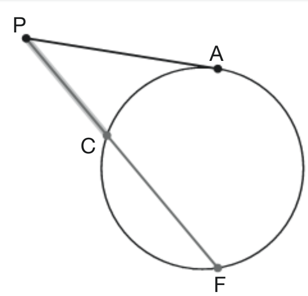
$AE : CE = ED : EB$

Teorema delle secanti



$PF : PE = PA : PC$

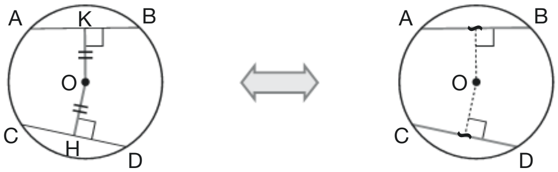
Teorema della secante e della tangente



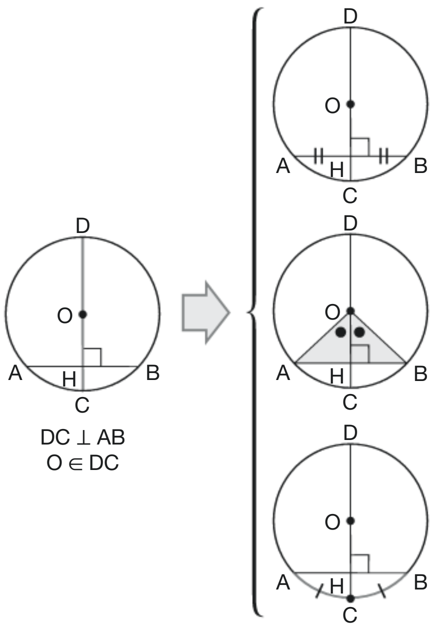
$PF : PA = PA : PC$

La circonferenza

I teoremi sulle corde



$OH \cong OK$ ⟺ $AB \cong CD$



$DC \perp AB$

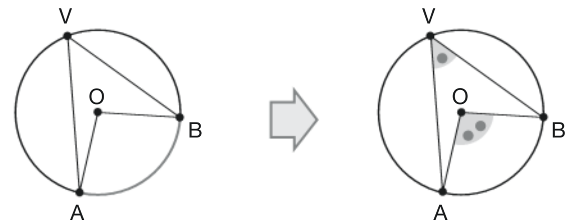
$O \in DC$

$AH \cong HB$

$A\widehat{O}C \cong C\widehat{O}B$

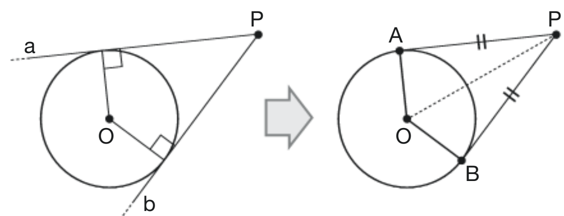
$\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{CB}$

Angoli alla circonferenza e angoli al centro



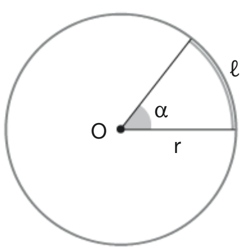
Ogni angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro corrispondente.

Tangente a una circonferenza da un punto esterno



Se da un punto esterno a una circonferenza si conducono le rette tangenti, i segmenti di tangente risultano congruenti.

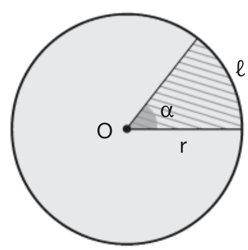
La lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio



$c = 2\pi r$

$\ell = \dfrac{\alpha}{180}\pi r$

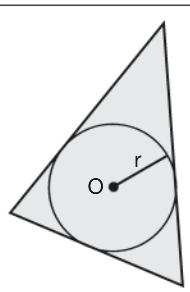
Misure della circonferenza (*c*) e dell'arco di angolo al centro α (*ℓ*).



$C = \pi r^2$

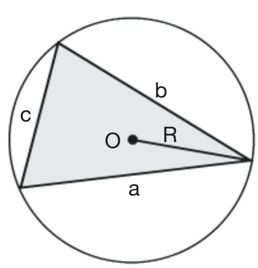
$S = \dfrac{\alpha}{360}\pi r^2 = \dfrac{1}{2}\ell r$

Misure dell'area del cerchio (*C*) e dell'area del settore circolare di angolo al centro α (*S*).



$r = \dfrac{\mathcal{A}}{p}$

Raggio del cerchio inscritto nel triangolo.

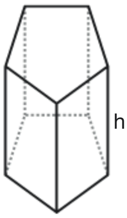


$R = \dfrac{abc}{4\mathcal{A}}$

Raggio del cerchio circoscritto al triangolo.

Formule di geometria solida

Prisma retto

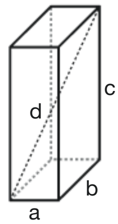


$A_\ell = 2p \cdot h$

$A_t = A_\ell + 2A_b$

$V = A_b \cdot h$

Parallepipedo rettangolo



$A_b = ab$

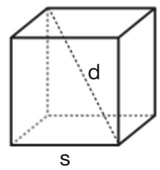
$A_\ell = 2(ac + bc)$

$A_t = 2(ac + ab + bc)$

$V = a \cdot b \cdot c$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Cubo



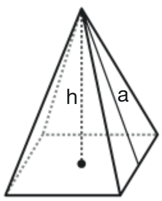
$A_b = s^2$

$A_t = 6s^2$

$V = s^3$

$d = s\sqrt{3}$

Piramide retta

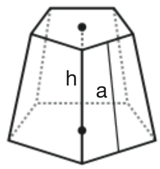


$A_\ell = p \cdot a$

$A_t = A_\ell + A_b$

$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$

Tronco di piramide retta

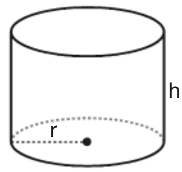


$A_\ell = (p + p') \cdot a$

$A_t = A_\ell + A_b + A'_b$

$V = \frac{1}{3} h \left(A_b + A'_b + \sqrt{A_b \cdot A'_b}\right)$

Cilindro



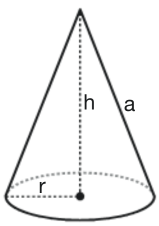
$A_b = \pi r^2$

$A_\ell = 2\pi r \cdot h$

$A_t = 2\pi r(h + r)$

$V = \pi r^2 \cdot h$

Cono



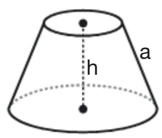
$A_b = \pi r^2$

$A_\ell = \pi r a$

$A_t = \pi r(a + r)$

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

Tronco di cono



$A_b = \pi r^2$

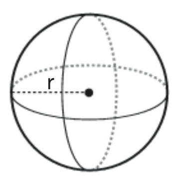
$A'_b = \pi r'^2$

$A_\ell = \pi a(r + r')$

$A_t = A_\ell + A_b + A'_b$

$V = \frac{1}{3} \pi h(r^2 + r'^2 + r \cdot r')$

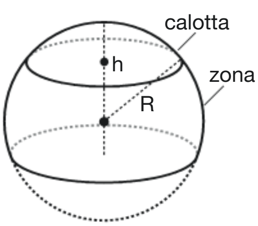
Sfera



$A = 4\pi r^2$

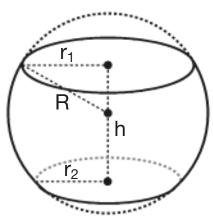
$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

Calotta e zona sferica



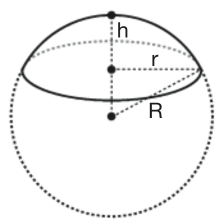
$S = 2\pi R h$

Segmento sferico a due basi



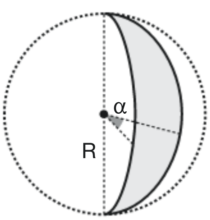
$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \pi r_1^2 \frac{h}{2} + \pi r_2^2 \frac{h}{2}$

Segmento sferico a una base



$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \pi r^2 \frac{h}{2} = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$

Fuso sferico

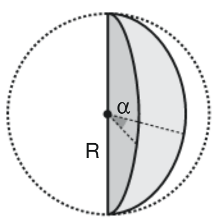


$S_f = 2R^2\alpha^{rad} = \frac{\alpha°}{90°} + \pi R^2$

α^{rad}: ampiezza del diedro in radianti

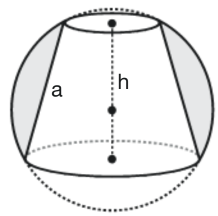
$\alpha°$: ampiezza del diedro in gradi

Spicchio sferico



$V_s = \frac{2}{3}\alpha^{rad} R^3 = \frac{\alpha°}{270°} \pi R^3$

Anello sferico



$V_a = \frac{1}{6}\pi a^2 h$

GEOMETRIA ANALITICA NEL PIANO

La **distanza fra due punti** $A(x_A;\, y_A)$ e $B(x_B;\, y_B)$ è data da: $\overline{\boldsymbol{AB}} = \sqrt{(\boldsymbol{x_B - x_A})^2 + (\boldsymbol{y_B - y_A})^2}$.

Il **punto medio** del segmento AB è $M(x_M;\, y_M)$ con: $\boldsymbol{x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}}$, $\quad \boldsymbol{y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}}$.

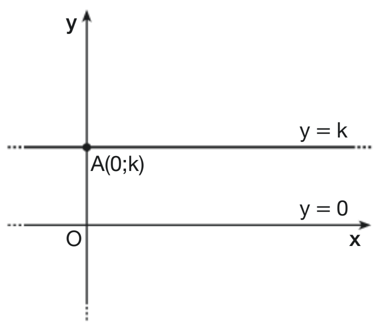
Il **baricentro di un triangolo** di vertici $A(x_A;\, y_A)$, $B(x_B;\, y_B)$, $C(x_C;\, y_C)$ è $G(x_G;\, y_G)$ con:

$$\boldsymbol{x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}}, \quad \boldsymbol{y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}}.$$

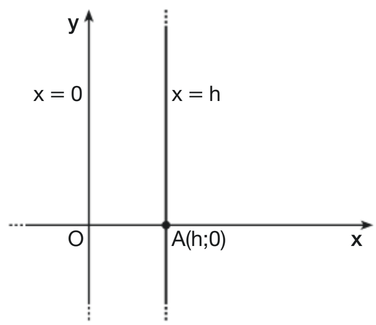
La **distanza di un punto** $P(x_0;\, y_0)$ **da una retta** r di equazione $ax + by + c = 0$ è uguale a: $\boldsymbol{d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$.

Il piano cartesiano e la retta

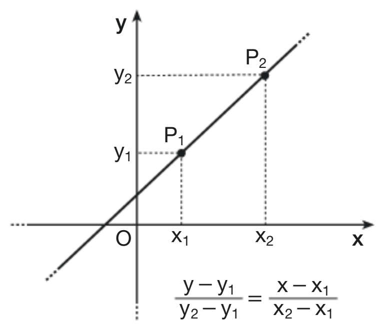
L'equazione di una retta



Retta parallela all'asse x.

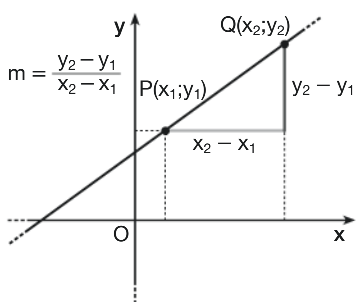


Retta parallela all'asse y.

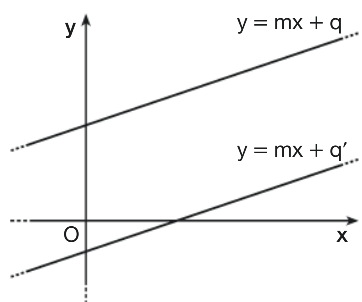


Retta non parallela agli assi passante per i punti $P_1(x_1;y_1)$ e $P_2(x_2;y_2)$

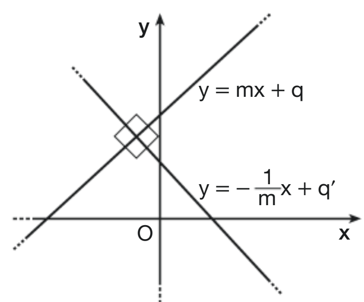
Coefficiente angolare



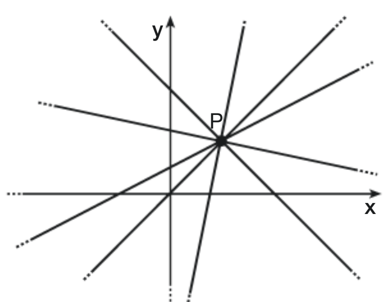
Rette parallele



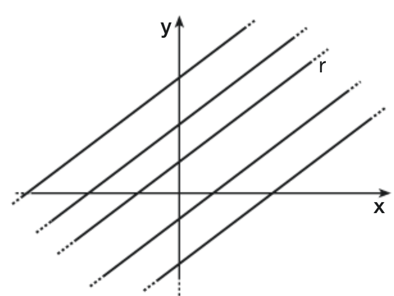
Rette perpendicolari



I fasci di rette



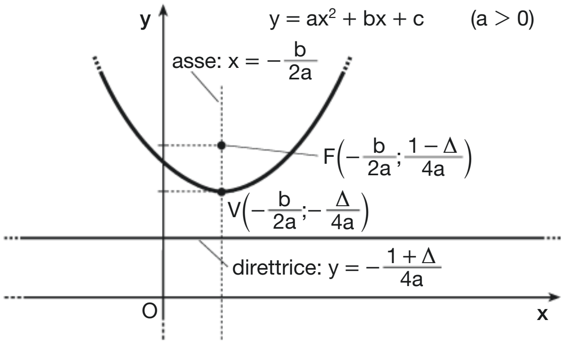
Fascio proprio di rette per un punto P: insieme di tutte le rette del piano passanti per P. P è detto **centro del fascio**.



Fascio improprio di rette parallele a una retta r.

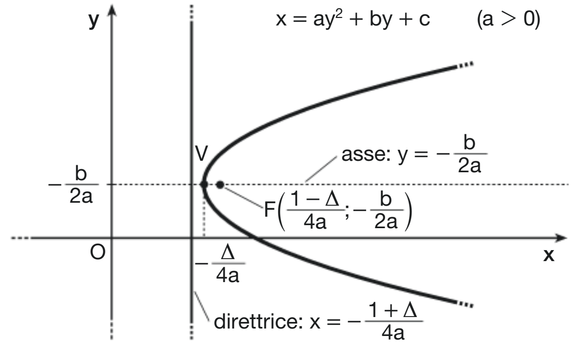
Le coniche

La parabola con asse parallelo all'asse *y*



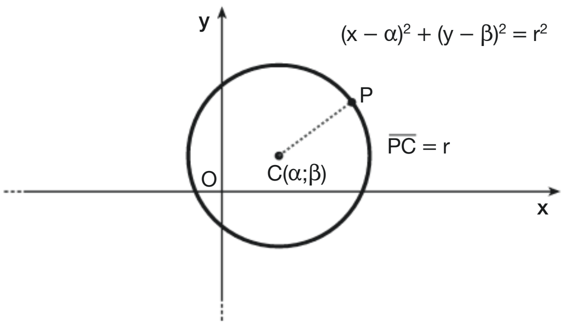
se $a < 0$ la concavità è rivolta verso il basso

La parabola con asse parallelo all'asse *x*

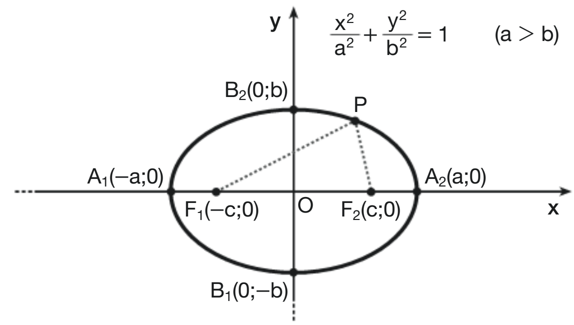


se $a < 0$ la concavità è rivolta nel verso opposto

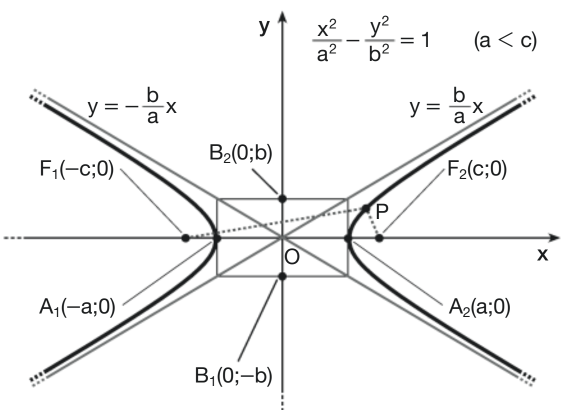
La circonferenza



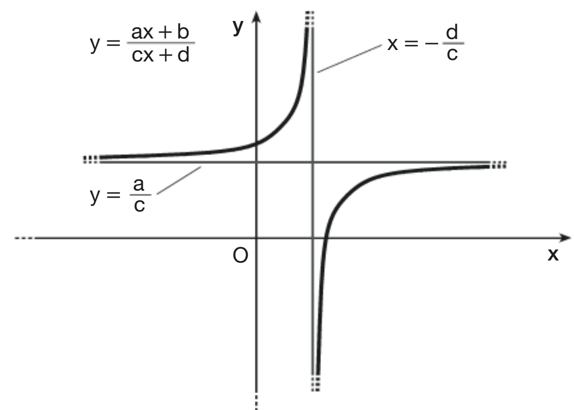
L'ellisse



L'iperbole

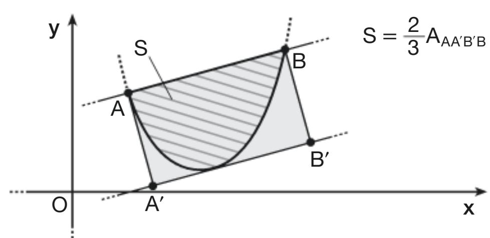


La funzione omografica



Il segmento parabolico

Tracciamo la retta parallela ad AB e tangente alla parabola, e consideriamo su di essa le proiezioni A' e B' di A e B.
L'area del segmento parabolico è uguale a $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo $AA'B'B$.

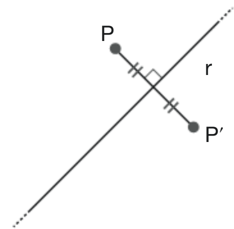


La simmetria assiale

Fissata nel piano una retta r, la **simmetria assiale rispetto alla retta r** è quella isometria che a ogni punto del piano P fa corrispondere il punto P' del semipiano opposto rispetto a r, in modo che r sia l'asse del segmento PP', ossia:

- r passa per il punto medio di PP';
- PP' è perpendicolare alla retta r.

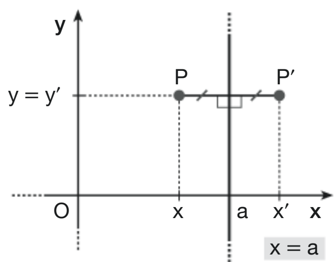
La retta r è detta **asse di simmetria**.



Nel piano cartesiano prendiamo in esame le seguenti simmetrie assiali, fornendo le relative equazioni.

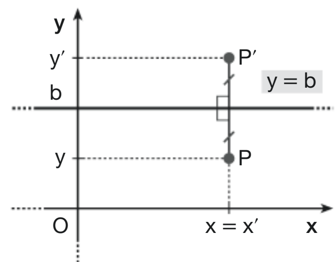
Simmetria con asse $x = a$ (asse parallelo all'asse y)

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$$



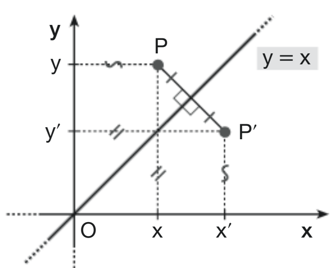
Simmetria con asse $y = b$ (asse parallelo all'asse x)

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$



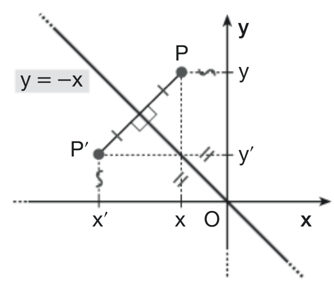
Simmetria con asse $y = x$ (bisettrice del primo e terzo quadrante)

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$



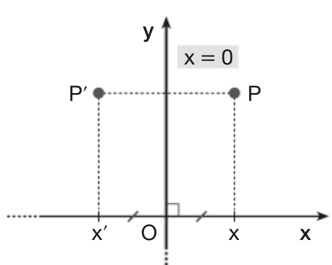
Simmetria con asse $y = -x$ (bisettrice del secondo e quarto quadrante)

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$



Simmetria con asse $x = 0$ (asse y)

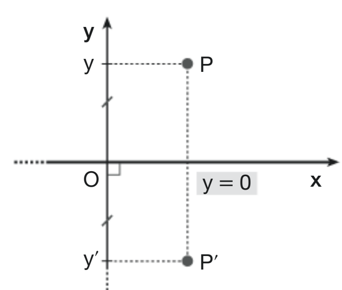
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$



Due punti simmetrici rispetto all'asse y hanno ascisse opposte e la stessa ordinata.

Simmetria con asse $y = 0$ (asse x)

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$



Due punti simmetrici rispetto all'asse x hanno la stessa ascissa e ordinate opposte.

GONIOMETRIA E TRIGONOMETRIA

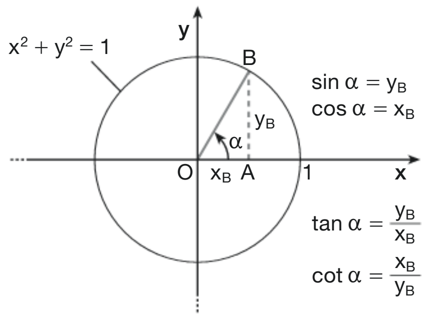
Le funzioni goniometriche

- **La prima relazione fondamentale**

  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

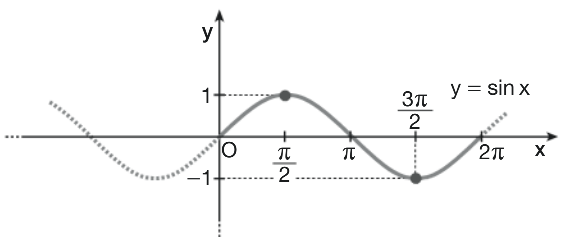
- **La seconda relazione fondamentale**

  $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$



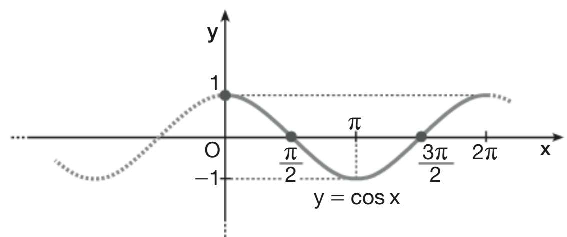
I grafici delle funzioni goniometriche

La sinusoide



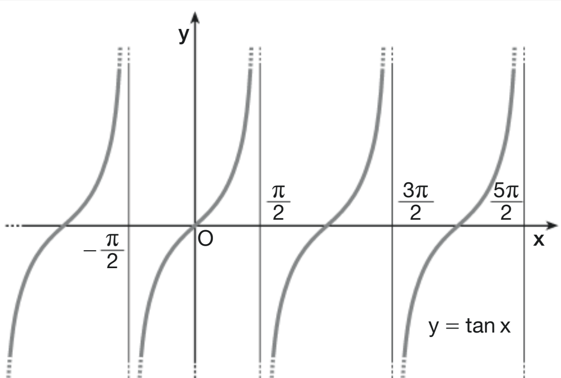
Periodo: 2π $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z} \quad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$

La cosinusoide



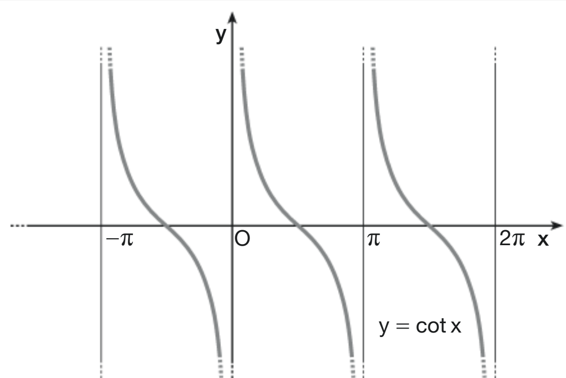
Periodo: 2π $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z} \quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$

La tangentoide



Periodo: π $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z} \quad \tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$

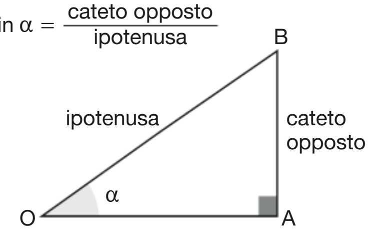
La cotangentoide



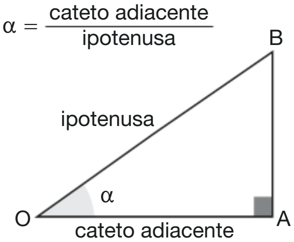
Periodo: π $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z} \quad \cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$

Seno, coseno e tangente su un triangolo rettangolo

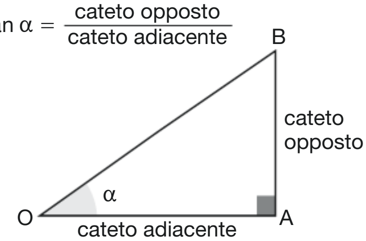
$\sin\alpha = \dfrac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}}$



$\cos\alpha = \dfrac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}}$

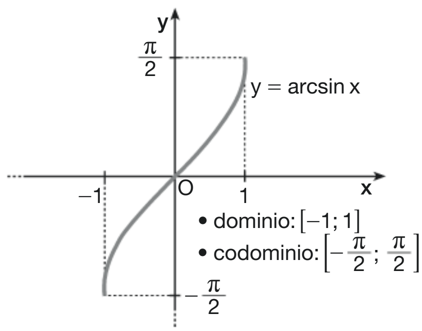


$\tan\alpha = \dfrac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}}$

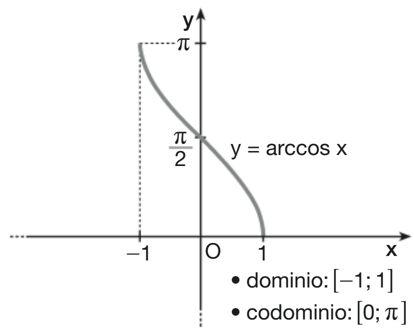


Le funzioni goniometriche inverse

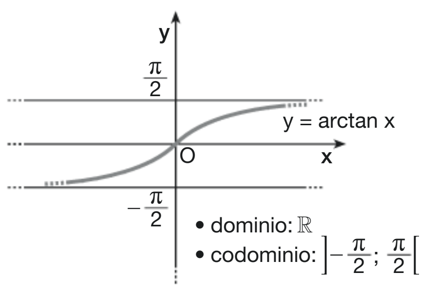
Arcoseno



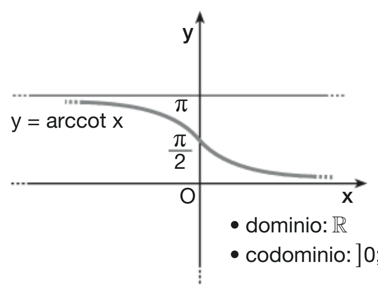
Arcocoseno



Arcotangente



Arcocotangente

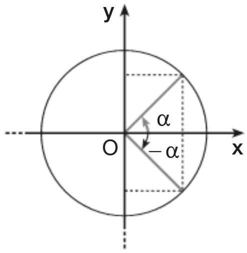


Seno, coseno, tangente e cotangente di angoli notevoli

radianti	gradi	seno	coseno	tangente	cotangente
0	0	0	1	0	non esiste
$\frac{\pi}{12}$	$15°$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{10}$	$18°$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{8}$	$22°30'$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{5}$	$36°$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$
$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{3}{10}\pi$	$54°$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{2}{5}\pi$	$72°$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$
$\frac{5}{12}\pi$	$75°$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$90°$	1	0	non esiste	0

Funzioni goniometriche di angoli associati

α e $-\alpha$



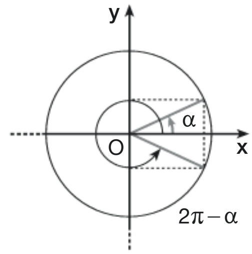
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

α e $2\pi - \alpha$



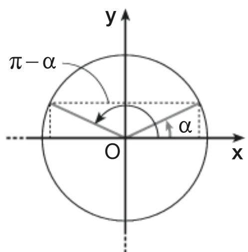
$\sin(2\pi-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(2\pi-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(2\pi-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(2\pi-\alpha) = -\cot\alpha$

α e $\pi - \alpha$



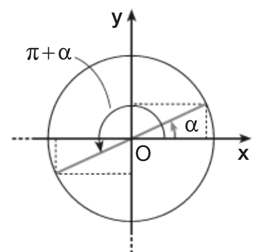
$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$

$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$

α e $\pi + \alpha$



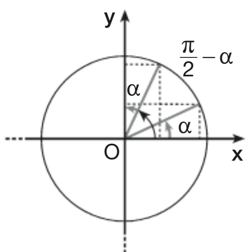
$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$

$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$

α e $\frac{\pi}{2} - \alpha$



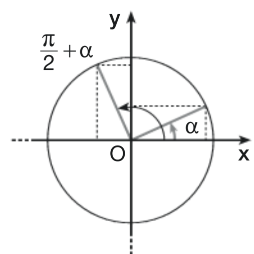
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$

$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$

α e $\frac{\pi}{2} + \alpha$



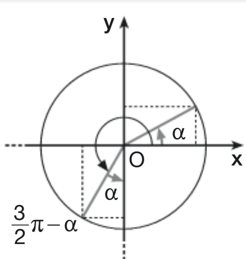
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$

$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$

α e $\frac{3}{2}\pi - \alpha$



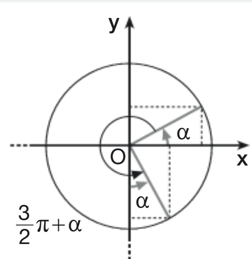
$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = -\cos\alpha$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = -\sin\alpha$

$\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = \cot\alpha$

$\cot\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = \tan\alpha$

α e $\frac{3}{2}\pi + \alpha$



$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) = -\cos\alpha$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) = \sin\alpha$

$\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) = -\cot\alpha$

$\cot\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) = -\tan\alpha$

Le formule goniometriche

Le formule di addizione

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\text{con } \alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k_1\pi,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+k_2\pi$$

Le formule parametriche

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}},\ \text{con } \alpha\neq\pi+2k\pi$$

Le formule di sottrazione

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\text{con } \alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k_1\pi,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+k_2\pi$$

Le formule di prostaferesi

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$

Le formule di duplicazione

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Le formule di Werner

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

Le formule di bisezione

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

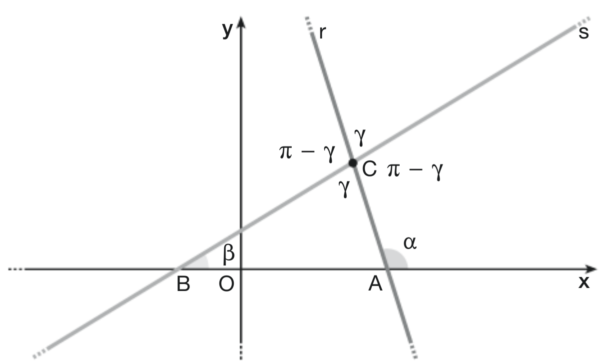
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

L'angolo fra due rette

$r: y=mx+q,$ con $m=\tan\alpha$

$s: y=m'x+q',$ con $m'=\tan\beta$

$$\mathbf{\tan\gamma}=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\boldsymbol{m-m'}}{\boldsymbol{1+mm'}}.$$

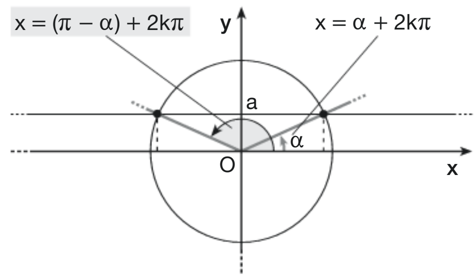


Equazioni goniometriche elementari

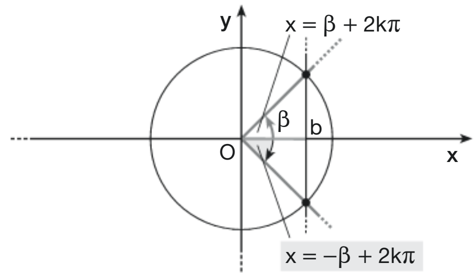
Un'**equazione** si dice **goniometrica** se contiene almeno una funzione goniometrica dell'incognita.
Si chiamano **elementari** le equazioni goniometriche del tipo:

$\sin x = a$, $\cos x = b$, $\tan x = c$.

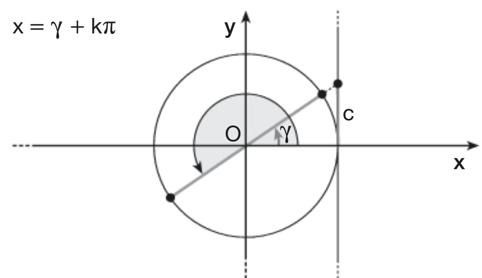
$\sin x = a$
- determinata se $-1 \leq a \leq 1$
- impossibile se $a < -1 \vee a > 1$



$\cos x = b$
- determinata se $-1 \leq b \leq 1$
- impossibile se $b < -1 \vee b > 1$



$\tan x = c$ — determinata $\forall c \in \mathbb{R}$



Ci sono particolari equazioni elementari che si possono risolvere con le proprietà della seguente tabella.

Tipo di equazione	Proprietà
$\sin\alpha = \sin\alpha'$	$\mathbf{\sin\alpha = \sin\alpha' \leftrightarrow \alpha = \alpha' + 2k\pi \vee \alpha + \alpha' = \pi + 2k\pi}$
$\sin\alpha = -\sin\alpha'$	$-\sin\alpha' = \sin(-\alpha')$
$\sin\alpha = \cos\alpha'$	$\cos\alpha' = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)$
$\sin\alpha = -\cos\alpha'$	$-\cos\alpha' = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha'\right)$
$\cos\alpha = \cos\alpha'$	$\mathbf{\cos\alpha = \cos\alpha' \leftrightarrow \alpha = \pm\alpha' + 2k\pi}$
$\cos\alpha = -\cos\alpha'$	$-\cos\alpha' = \cos(\pi - \alpha')$
$\tan\alpha = \tan\alpha'$	$\mathbf{\tan\alpha = \tan\alpha' \leftrightarrow \alpha = \alpha' + k\pi}$
$\tan\alpha = -\tan\alpha'$	$\mathbf{-\tan\alpha' = \tan(-\alpha')}$

Equazioni lineari in seno e coseno

$a \sin x + b \cos x + c = 0 \qquad a \neq 0, b \neq 0$

Metodo algebrico

- $c = 0 \rightarrow$ si divide per $\cos x \neq 0 \rightarrow \tan x = -\dfrac{b}{a}$.
- $c \neq 0 \rightarrow$ si determinano le eventuali soluzioni di tipo $x = \pi + 2k\pi$;
  se $x \neq \pi + 2k\pi$, applicando le formule parametriche si ottiene

$$\begin{cases} t^2(c-b) + 2at + b + c = 0 \\ t = \tan \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

Metodo grafico

Si sostituisce $Y = \sin x$ e $X = \cos x$ e si risolve quindi il sistema seguente:

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ aY + bX + c = 0 \end{cases}$$

Metodo dell'angolo aggiunto

Si risolve il sistema seguente:

$$\begin{cases} \sin(x + \alpha) = -\dfrac{c}{r} \\ r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan \alpha = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Equazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno

$a \sin^2 x + b \cos x \sin x + c \cos x^2 = 0$

Primo metodo

- $a = 0 \rightarrow \cos x\,(b \sin x + c \cos x) = 0$
- $c = 0 \rightarrow \sin x (a \sin x + b \cos x) = 0$
- $a \neq 0 \wedge c \neq 0 \rightarrow$ si divide per $\cos^2 x \neq 0 \rightarrow a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$

Secondo metodo

Sostituendo $\begin{cases} \sin x \cos x = \dfrac{\sin 2x}{2} \\ \sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2} \end{cases}$ si ottiene un'equazione lineare.

Un'equazione lineare della forma

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d \qquad (d \neq 0)$$

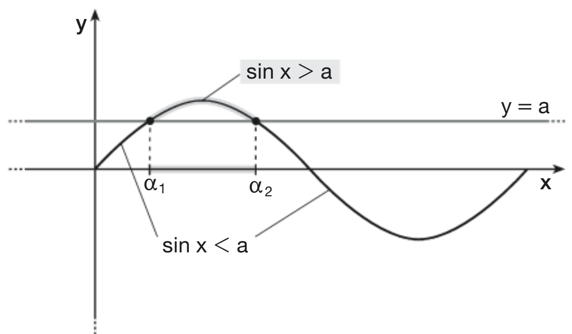
è riconducibile a un'equazione omogenea sostituendo $d = d(\cos^2 x + \sin^2 x)$.

Disequazioni goniometriche

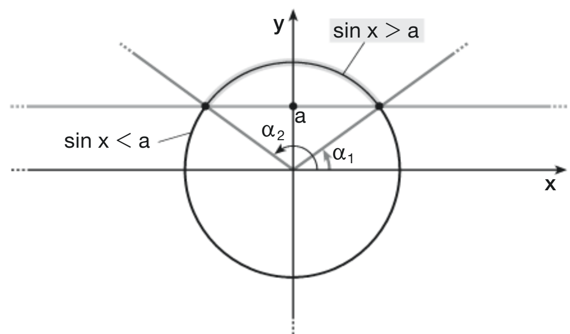
Primo metodo
Si studia la posizione reciproca tra il grafico della funzione goniometrica e la retta $y = a$.

Secondo metodo
Si disegna la circonferenza goniometrica, si risolve l'equazione associata, si determinano gli archi in cui è soddisfatta.

La funzione seno (primo metodo)

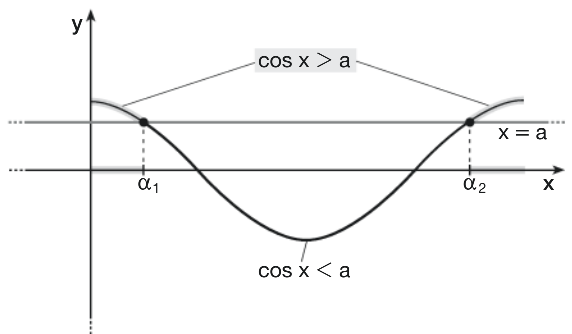


La funzione seno (secondo metodo)

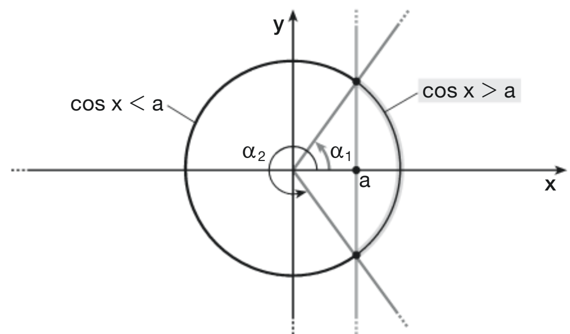


$\sin x > a \rightarrow \alpha_1 + 2k\pi < x < \alpha_2 + 2k\pi$; $\sin x < a \rightarrow 0 + 2k\pi < x < \alpha_1 + 2k\pi \vee \alpha_2 + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$

La funzione coseno (primo metodo)

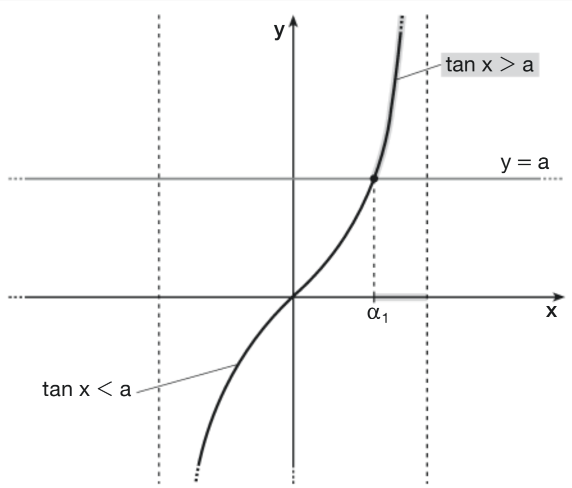


La funzione coseno (secondo metodo)

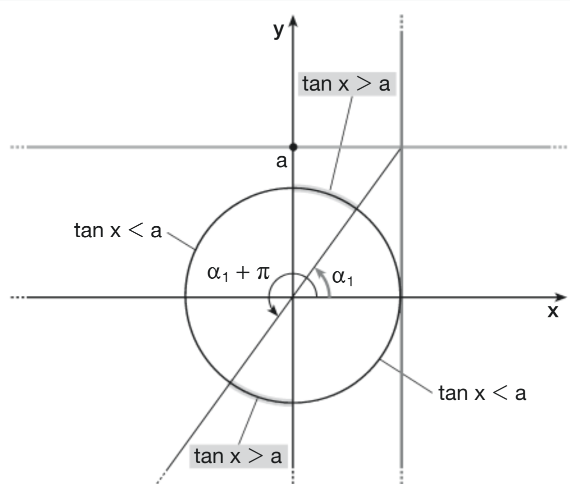


$\cos x > a \rightarrow 0 + 2k\pi < x < \alpha_1 + 2k\pi \vee \alpha_2 + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$; $\cos x < a \rightarrow \alpha_1 + 2k\pi < x < \alpha_2 + 2k\pi$

La funzione tangente (primo metodo)



La funzione tangente (secondo metodo)



$\tan x > a \rightarrow \alpha_1 + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\tan x < a \rightarrow -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \alpha_1 + k\pi$

GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO

Distanza fra due punti e punto medio

- La **distanza fra due punti** $A(x_A;\, y_A;\, z_A)$ e $B(x_B;\, y_B;\, z_B)$ è: $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.
- Le coordinate del **punto medio** M di un segmento AB sono:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2},\; y_M = \frac{y_A + y_B}{2},\; z_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

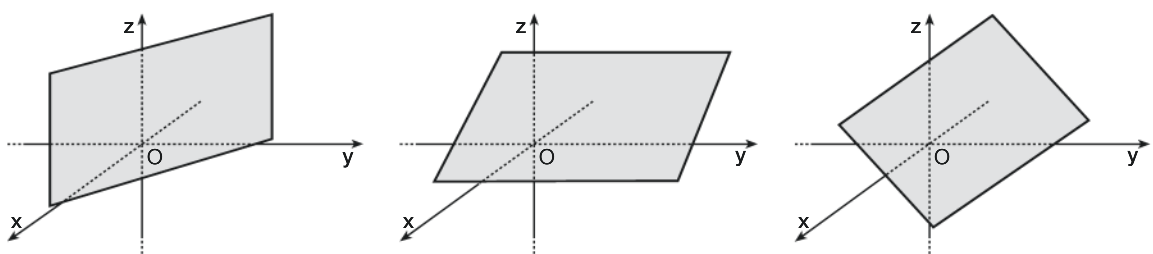
Vettori nello spazio

- A ogni punto $A(a_x;\, a_y;\, a_z)$ è associato un vettore $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ con modulo $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.
- Dati i punti $A(x_A;\, y_A;\, z_A)$ e $B(x_B;\, y_B;\, z_B)$, il vettore da essi individuato è $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A;\, y_B - y_A;\, z_B - z_A)$.
- **Operazioni con due vettori** $\vec{a}(a_x;\, a_y;\, a_z)$ e $\vec{b}(b_x;\, b_y;\, b_z)$:
  - somma: $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x;\, a_y + b_y;\, a_z + b_z)$;
  - differenza: $\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x;\, a_y - b_y;\, a_z - b_z)$.
  - prodotto per uno scalare: $k\vec{a} = (ka_x;\, ka_y;\, ka_z)$.
  - prodotto scalare: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.
- $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono **paralleli** se $\vec{a} = k\vec{b}$, con $k \in \mathbb{R}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ cioè:
  $\vec{a} \,/\!/\, \vec{b} \leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$
- $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono **perpendicolari** se $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, cioè:
  $\vec{a} \perp \vec{b} \leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

Punti, piani e rette

- L'**equazione generale del piano** passante per $P_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ con vettore normale $\vec{n}(a;\, b;\, c)$ è:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad \rightarrow \quad ax + by + cz + d = 0.$$

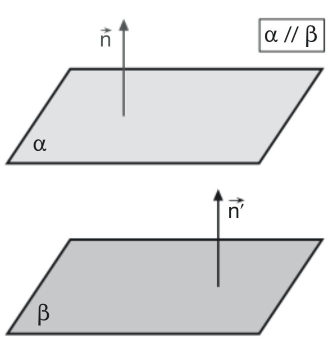


piano ax + by + d = 0
c = 0: il vettore normale è (a; b; 0), il piano è parallelo all'asse z e perpendicolare al piano Oxy.

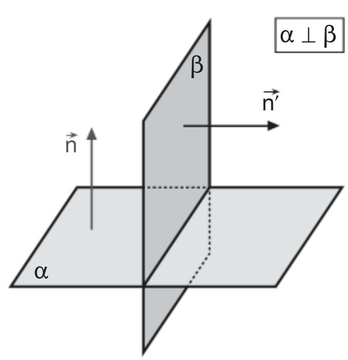
piano ax + cz + d = 0
b = 0: il vettore normale è (a; 0; c), il piano è parallelo all'asse y e perpendicolare al piano Oxz.

piano by + cz + d = 0
a = 0: il vettore normale è (0; b; c), il piano è parallelo all'asse x e perpendicolare al piano Oyz.

- Due piani di equazioni $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sono:
  - **paralleli** se
    $\vec{n} \,/\!/\, \vec{n'} \rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (se $a', b', c' \neq 0$);



  - **perpendicolari** se
    $\vec{n} \perp \vec{n'} \rightarrow \vec{n}\cdot\vec{n'} = 0 \rightarrow aa' + bb' + cc' = 0$.



- La **distanza** del **punto** $A(x_A; y_A; z_A)$ dal **piano** α di equazione $ax + by + cz + d = 0$ è:

$$d(A, \alpha) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

- La **retta** passante per $P_0(x_0; y_0; z_0)$ con vettore direzione $\vec{v}(l; m; n)$ non nullo ha **equazioni parametriche**

$$\begin{cases} x = x_0 + kl \\ y = y_0 + km, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}, \\ z = z_0 + kn \end{cases}$$

ed **equazioni cartesiane**, valide se $l, m, n \neq 0$,

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

- La retta passante per due punti $A(x_1; y_1; z_1)$ e $B(x_2; y_2; z_2)$ ha equazioni

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

che sono le **condizioni di allineamento** di tre punti A, B e $P(x; y; z)$.

- Una retta può essere individuata come intersezione di due piani non paralleli:

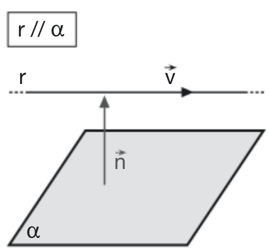
$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0. \end{cases}$$

- Due rette con vettori direzione $\vec{v}(l; m; n)$ e $\vec{w}(l'; m'; n')$ sono:
  - **parallele** se $\vec{v} \,//\, \vec{w} \rightarrow \frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}$ (se $l', m', n' \neq 0$);
  - **perpendicolari** se $\vec{v} \perp \vec{w} \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \rightarrow ll' + mm' + nn' = 0$.

- Un piano con vettore normale $\vec{n}(a; b; c)$ e una retta con vettore direzione $\vec{v}(l; m; n)$ sono:

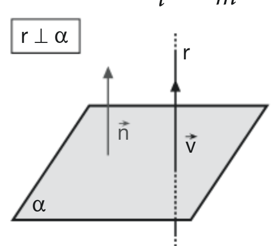
– **paralleli** se

$$\vec{n} \perp \vec{v} \rightarrow al + bm + cn = 0;$$



– **perpendicolari** se

$$\vec{n} \,//\, \vec{v} \rightarrow \frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n} \text{ (se } l, m, n \neq 0).$$



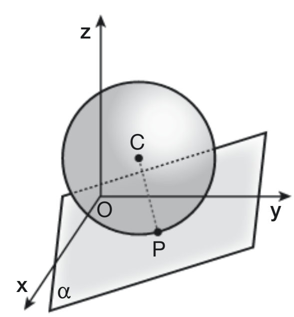
Superficie sferica

- Una **superficie sferica** di centro $C(x_0; y_0; z_0)$ e raggio r ha **equazione**:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

L'equazione $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ rappresenta una sfera di centro $C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$ e raggio $r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d}$ se $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d \geq 0$.

- Un piano α è tangente a una sfera di raggio r e centro C se $d(C, \alpha) = r$.



LIMITI E FUNZIONI CONTINUE

Le operazioni sui limiti

Indichiamo con α un valore che può essere $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0^+, x_0^-, $+\infty$, $-\infty$.
Per i limiti della somma, del prodotto e del quoziente di due funzioni si ha la seguente tabella.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} [f(x)+g(x)]$	$\lim\limits_{x\to\alpha} [f(x)\cdot g(x)]$	$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
$l \in \mathbb{R}$	$m \in \mathbb{R}$ $m \neq 0$	$m + l$	$m \cdot l$	$\dfrac{l}{m}$
$l \in \mathbb{R}$, $l \neq 0$	0	l	0	$+\infty$, se $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ per $x \to \alpha$ $-\infty$, se $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$ per $x \to \alpha$
0	0	0	0	forma indeterminata “$\dfrac{0}{0}$”
$l \in \mathbb{R}$ $l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$, se $l > 0$ $-\infty$, se $l < 0$	0
$l \in \mathbb{R}$ $l \neq 0$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$, se $l < 0$ $-\infty$, se $l > 0$	0
$+\infty$	$m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$, se $m > 0$ $-\infty$, se $m < 0$	$+\infty$, se $m > 0$ $-\infty$, se $m < 0$
$-\infty$	$m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$	$-\infty$	$+\infty$, se $m < 0$ $-\infty$, se $m > 0$	$+\infty$, se $m < 0$ $-\infty$, se $m > 0$
$+\infty$ $-\infty$	0	$+\infty$ $-\infty$	forma indeterminata “$0 \cdot \infty$”	$+\infty$, se $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ per $x \to \alpha$ $-\infty$, se $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$ per $x \to \alpha$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	forma indeterminata “$\dfrac{\infty}{\infty}$”
$+\infty$	$-\infty$	forma indeterminata “$+\infty - \infty$”	$-\infty$	forma indeterminata “$\dfrac{\infty}{\infty}$”
$-\infty$	$+\infty$	forma indeterminata “$+\infty - \infty$”	$-\infty$	forma indeterminata “$\dfrac{\infty}{\infty}$”
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	forma indeterminata “$\dfrac{\infty}{\infty}$”

Limiti di funzioni polinomiali e funzioni razionali

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_0x^n = \infty$ con segno dato dalla regola dei segni del prodotto.
- $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } n > m \\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}$$

Limiti notevoli

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$, dove e è un numero irrazionale, $e \simeq 2{,}7182\ldots$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Gerarchia degli infiniti

Date le tre famiglie di funzioni:

$$(\log_a x)^\alpha, \quad x^\beta, \quad b^x, \quad \text{con } \alpha, \beta > 0 \text{ e } a, b > 1,$$

allora, per $x \to +\infty$, ognuna è un infinito di ordine inferiore rispetto a quella che si trova a destra, cioè:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{b^x} = 0.$$

Sinteticamente, possiamo scrivere:

$$(\log_a x)^\alpha < x^\beta < b^x.$$

Le forme indeterminate

La forma indeterminata $+\infty - \infty$

- Limite di funzione polinomiale
$$\lim_{x\to+\infty} (x^3 - 4x + 5) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$
- Utilizzare la gerarchia degli infiniti
$$\lim_{x\to+\infty} \ln x - e^x = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(\frac{\ln x}{e^x} - 1\right) = -\infty$$
- Razionalizzazione
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x+5} = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+5}) \cdot \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+5}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+5}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x} + 2 - \cancel{x} - 5}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+5}} = 0$$

La forma indeterminata $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x\to 0} [(1 - \cos 2x) \cdot \cot x] = \lim_{x\to 0}\left(2\sin^{\cancel{2}} x \cdot \frac{\cos x}{\cancel{\sin x}}\right) = \lim_{x\to 0} (2\sin x \cos x) = 0$$

La forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

- Rapporto di funzioni polinomiali

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^3+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^3}\left(1+\frac{2}{x^3}\right)}=0$$

- Utilizzare il teorema di De L'Hospital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x}{\frac{1}{1+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x(1+x)}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2x^2}{x^2+1}=2$$

La forma indeterminata $\frac{0}{0}$

- Utilizzare il teorema di Ruffini per scomporre sia il numeratore sia il denominatore

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\frac{3}{2}$$

- Utilizzare il teorema di De L'Hospital

$$\lim_{x\to-1}\frac{-x^3+3x^2+9x+5}{x^2-7-6x}=\lim_{x\to-1}\frac{-3x^2+6x+9}{2x-6}=0$$

La forma indeterminata 1^∞

Utilizzare il limite notevole $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{x-2+2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{x-2}\cdot\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^2=e^3\cdot 1=e^3$$

La forma indeterminata ∞^0

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}=1 \quad \left(\text{poiché } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \text{ per la gerarchia degli infiniti}\right)$$

Gli asintoti e la loro ricerca