

## RIEPILOGO FRAZIONI ALGEBRICHE

Per semplificare una frazione:

- scomponi numeratore e denominatore;
- semplifica numeratore e denominatore tenendo presente che:
  - il quoziente di due fattori uguali è 1
  - il quoziente di due fattori opposti è -1

Per svolgere una somma:

- scomponi i denominatori delle frazioni;
- calcola il mcm dei denominatori;
- riporta le frazioni allo stesso denominatore dividendo il denominatore comune per il vecchio denominatore e moltiplicando il risultato per il vecchio numeratore;
- svolgi le potenze e i prodotti a numeratore;
- svolgi le somme a numeratore;
- scomponi il numeratore;
- semplifica la frazione ottenuta

Per svolgere un prodotto:

- scomponi numeratori e denominatori;
- semplifica i fattori uguali o opposti che si trovano sia a numeratore che a denominatore;
- moltiplica tra di loro i numeratori e fai lo stesso per i denominatori

Per svolgere una divisione:

- trasforma la divisione in una moltiplicazione tra la prima frazione e l'inversa della seconda (in pratica, nella seconda frazione devi scambiare il numeratore con il denominatore);
- a questo punto, segui lo schema del prodotto

## Somma di frazioni algebriche

## Esempio 1

$\frac{a+b}{a-b} - \frac{a^2+3b^2}{a^2-b^2} + \frac{a-2b}{a+b} =$	Scompongo i denominatori: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
$= \frac{a+b}{a-b} - \frac{a^2+3b^2}{(a+b)(a-b)} + \frac{a-2b}{a+b} =$	Calcolo il mcm dei denominatori (prodotto di tutti i fattori, comuni e non comuni, presi una sola volta, con il più alto esponente): $mcm=(a+b)(a-b)$
$= \frac{(a+b)^2 - (a^2+3b^2) + (a-2b)(a-b)}{(a+b)(a-b)} =$	Riporto le frazioni allo stesso denominatore (divido il mcm per il "vecchio" denominatore e moltiplico il risultato per il "vecchio" numeratore). <i>Attenzione:</i> a questo punto <u>non</u> posso semplificare tra loro numeratore e denominatore, perché il primo non è scomposto (è ancora scritto sotto forma di somma)!!!
$= \frac{a^2+2ab+b^2 - a^2-3b^2 + a^2-ab-2ab+2b^2}{(a+b)(a-b)} =$	Svolgo le potenze e i prodotti a numeratore.
$= \frac{a^2-ab}{(a+b)(a-b)} =$	Svolgo le somme a numeratore.
$= \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)} =$	Scompongo in fattori il numeratore.
$= \frac{a}{a+b}$	Semplifico numeratore e denominatore.

## Esempio 2

$$\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-2y}{x+y} + \frac{2(x^2+y^2)}{y^2-x^2} = \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-2y}{x+y} + \frac{2(x^2+y^2)}{(y+x)(y-x)} =$$

Poiché il fattore  $y-x$  è l'opposto di  $x-y$ , posso sostituirlo cambiando il segno che precede l'ultima frazione:

$$= \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-2y}{x+y} - \frac{2(x^2+y^2)}{(x+y)(x-y)} = \frac{(x+y)^2 + (x-2y)(x-y) - 2(x^2+y^2)}{(x+y)(x-y)} =$$

$$= \frac{x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy - xy + 2y^2 - 2x^2 - 2y^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{y^2 - xy}{(x+y)(x-y)} = \frac{y(y-x)}{(x+y)(x-y)} =$$

Osservo che  $y-x$  e  $x-y$  sono fattori opposti, quindi il loro quoziente è  $-1$ .

$$= -\frac{y}{x+y}.$$

*Esempio 3*

$$\frac{3}{x-y} + \frac{3x-y}{xy-x^2} + \frac{x-2y}{xy-y^2} = \frac{3}{x-y} + \frac{3x-y}{x(y-x)} + \frac{x-2y}{y(x-y)} =$$

Osservo che  $y-x$  è l'opposto di  $x-y$  :

$$= \frac{3}{x-y} - \frac{3x-y}{x(x-y)} + \frac{x-2y}{y(x-y)} =$$

*Attenzione:* il fattore  $x-y$  non contiene  $x$  e  $y$  come fattori (termini di un prodotto), ma come addendi (termini di una somma), quindi il denominatore comune è:  $mcm = xy(x-y)$  .

$$= \frac{3xy - y(3x-y) + x(x-2y)}{xy(x-y)} = \frac{3xy - 3xy + y^2 + x^2 - 2xy}{xy(x-y)} = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy(x-y)} =$$

$$= \frac{(x-y)^2}{xy(x-y)} = \frac{x-y}{xy}.$$

*Esempio 4*

$$\frac{a-1}{a+1} - \frac{a^2-2a+1}{a^2+2a+1} + \frac{a^3+a^2+3a+3}{a^3+3a^2+3a+1} = \frac{a-1}{a+1} - \frac{a^2-2a+1}{(a+1)^2} + \frac{a^3+a^2+3a+3}{(a+1)^3} =$$

*Osserva:* nel mcm devo prendere l'esponente più alto.

$$= \frac{(a-1)(a+1)^2 - (a^2-2a+1)(a+1) + a^3+a^2+3a+3}{(a+1)^3} =$$

$$= \frac{(a-1)(a^2+2a+1) - (a^3+a^2-2a^2-2a+a+1) + a^3+a^2+3a+3}{(a+1)^3} =$$

$$= \frac{a^3+2a^2+a-a^2-2a-1-a^3-a^2+2a^2+2a-a-1+a^3+a^2+3a+3}{(a+1)^3} =$$

$$= \frac{a^3+3a^2+3a+1}{(a+1)^3} = \frac{(a+1)^3}{(a+1)^3} = 1.$$

## Esercizi

Semplifica le seguenti frazioni algebriche:

1.  $\frac{4a^2b}{ab^3}$  ;  $\frac{x^2-3x}{2xy}$   $R: \frac{4a}{b^2}; \frac{x-3}{2y}$
2.  $\frac{a^2-2ab}{a-2b}$  ;  $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}$   $R: a; \frac{x-y}{x+y}$
3.  $\frac{35a^2b^3}{21a^4b^2c}$  ;  $\frac{18a^3b^5x^2y}{12a^3b^2xy^4}$   $R: \frac{5b}{3a^2c}; \frac{3b^3x}{2y^3}$
4.  $\frac{x^2}{x^2-xy}$  ;  $\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$   $R: \frac{x}{x-y}; \frac{a-b}{a+b}$
5.  $\frac{4a^2b^2}{a^2b-ab^2}$  ;  $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2y-xy^2}$   $R: \frac{4ab}{a-b}; \frac{x-y}{xy}$
6.  $\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$  ;  $\frac{x^2-5x+6}{x^3-6x^2+12x-8}$   $R: \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}; \frac{x-3}{(x-2)^2}$
7.  $\frac{ax-x+3a-3}{a^2-1}$  ;  $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+x}$   $R: \frac{x+3}{a+1}; \frac{x+1}{x}$
8.  $\frac{x^4-y^4}{x^3-x^2y+xy^2-y^3}$  ;  $\frac{x^3+x^2-6x}{x^4-4x^2}$   $R: x+y; \frac{x+3}{x(x+2)}$
9.  $\frac{a^2-2a-ab+2b}{a^2-b^2}$  ;  $\frac{a^3-8}{a^3+2a^2+4a}$   $R: \frac{a-2}{a+b}; \frac{a-2}{a}$
10.  $\frac{m^2+2m-15}{m^2-8m+15}$  ;  $\frac{k^3-3k^2+3k-1}{k^3-k^2-k+1}$   $R: \frac{m+5}{m-5}; \frac{k-1}{k+1}$
11.  $\frac{25a^2b^2c^2}{15ab^3c^4}$  ;  $-\frac{6x^3y^4z^5}{8x^2y^2z^2}$   $R: \frac{5a}{3bc^2}; -\frac{3}{4}xy^2z^3$
12.  $\frac{a^2-a}{ab}$  ;  $\frac{x^2y}{x^3y-x^2y}$   $R: \frac{a-1}{b}; \frac{1}{x-1}$
13.  $\frac{x^2-1}{x^2+x}$  ;  $\frac{25a^2-10a}{5ab-2b}$   $R: \frac{x-1}{x}; \frac{5a}{b}$
14.  $\frac{4x^2y-8x^2}{ay-2a}$  ;  $\frac{x^3+2x^2}{x^2+4x+4}$   $R: \frac{4x^2}{a}; \frac{x^2}{x+2}$
15.  $\frac{x^4-1}{x^2+1}$  ;  $\frac{4a^2-8ab}{a^2-4ab+4b^2}$   $R: x^2-1; \frac{4a}{a-2b}$
16.  $\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$  ;  $\frac{a^3-a}{a^4-a}$   $R: \frac{x^2-xy+y^2}{x-y}; \frac{a+1}{a^2+a+1}$

17.  $\frac{x^2-x+1}{x^3+1}$  ;  $\frac{x^4+8x}{x^3-2x^2+4x}$   $R: \frac{1}{x+1}; x+2$
18.  $\frac{a^2-2a+1}{1-3a+3a^2-a^3}$  ;  $\frac{a^2-1}{1-3a+3a^2-a^3}$   $R: \frac{1}{1-a}; -\frac{a+1}{(1-a)^2}$
19.  $\frac{a^2-2a+1}{a^4-2a^2+1}$  ;  $\frac{ax^6-3ax^4+3ax^2-a}{ax^4-2ax^2+a}$   $R: \frac{1}{(a+1)^2}; x^2-1$
20.  $\frac{a^2-3a-4}{a^2-4a-5}$  ;  $\frac{a^2-12a+36}{a^2-3a-18}$   $R: \frac{a-4}{a-5}; \frac{a-6}{a+3}$
21.  $\frac{x^2-3x+2}{x^3-x^2-4x+4}$  ;  $\frac{x^2+1}{(x+1)^2}$   $R: \frac{1}{x+2}; \frac{x^2+1}{(x+1)^2}$
22.  $\frac{4x^3y^2}{8xy^3}$  ;  $\frac{4a-2b}{6a-3b}$   $R: \frac{x^2}{2y}; \frac{2}{3}$
23.  $\frac{-25a^3b^2-5ab^4}{20a^3b+4ab^3}$  ;  $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$   $R: -\frac{5}{4}b; \frac{x-3}{x+3}$
24.  $\frac{7x^2-14x+7}{14x^2-14}$  ;  $\frac{x^3-27}{4x^2+12x+36}$   $R: \frac{x-1}{2(x+1)}; \frac{x-3}{4}$
25.  $\frac{a^3-4a^2-5a}{a^3-a}$  ;  $\frac{a^8-2a^4+1}{a^5-a^4-a+1}$   $R: \frac{a-5}{a-1}; (a+1)(a^2+1)$

Svolgi le seguenti somme di frazioni algebriche:

26.  $\frac{2}{3x} + \frac{1}{2x} - \frac{5}{6x}$  ;  $\frac{3a}{2b} - \frac{3b}{2a} - \frac{3a^2}{2ab}$   $R: \frac{1}{3x}; -\frac{3b}{2a}$
27.  $x-1 + \frac{x^2+1}{x+1}$  ;  $a-1 + \frac{a-1}{a^2-1}$   $R: \frac{2x^2}{x+1}; \frac{a^2}{a+1}$
28.  $a+1 - \frac{(a-1)^2}{a+1}$  ;  $x+1 + \frac{x-1}{x^2-2x+1}$   $R: \frac{4a}{a+1}; \frac{x^2}{x-1}$
29.  $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}$  ;  $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a^2+3b^2}{b^2-a^2} + \frac{a-2b}{a+b}$   $R: \frac{2(x^2+y^2)}{x^2-y^2}; \frac{a}{a+b}$
30.  $\frac{a+2}{a^2+a} + \frac{a-2}{a-a^2} - \frac{3}{a^2-1}$  ;  $\frac{b}{ab-a^2} + \frac{1}{a-b}$   $R: \frac{1}{1-a^2}; \frac{1}{a}$
31.  $\frac{2}{x^2-2x+1} + \frac{x}{x-1} - 1$  ;  $\frac{a+2}{a+3} - \frac{1}{2-a} - \frac{3a-1}{a^2+a-6}$   $R: \frac{x+1}{(x-1)^2}; \frac{a}{a+3}$
32.  $\frac{1}{2-x} + \frac{3x-1}{x^2+x-6} - \frac{2}{x+3}$  ;  $\frac{1-a}{1+a} + \frac{1-3a}{a^2-1} - \frac{a+1}{1-a}$   $R: 0; \frac{1}{a-1}$
33.  $\frac{2x^2}{x^2-y^2} + \frac{2x^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{y^4-x^4}$  ;  $\frac{1-4a+3a^2}{a^3-3a^2+3a-1} - \frac{1+a}{1-2a+a^2}$   $R: \frac{4x^2}{x^2-y^2}; \frac{2}{a-1}$

34.  $\frac{x+y}{x-y} + \frac{2x}{y-x}$  ;  $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-2y}{x+y} + \frac{2x^2+2y^2}{y^2-x^2}$   $R: -1; -\frac{y}{x+y}$
35.  $\frac{3}{x-y} + \frac{3x-y}{xy-x^2} + \frac{x-2y}{xy-y^2}$  ;  $\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} - \frac{3x+10}{x^2+5x+6}$   $R: \frac{x-y}{xy}; \frac{8}{x+3}$
36.  $\frac{6}{a-3} + \frac{2}{3-a} - \frac{a+1}{a^2-5a+6}$  ;  $\frac{x-y}{2xy} + \frac{x+y}{xy} - \frac{2x+y}{3xy}$   $R: \frac{3}{a-2}; \frac{5x+y}{6xy}$
37.  $\frac{5}{x-y} - \frac{5y}{x^2-xy}$  ;  $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} - \frac{3x-1}{x^2-1}$   $R: \frac{5}{x}; \frac{1}{x-1}$
38.  $\frac{2y}{x^2-y^2} - \frac{x+y}{x^2-xy}$  ;  $\frac{4a^2}{a^2-b^2} - \frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b}$   $R: \frac{-x^2-y^2}{x(x+y)(x-y)}; 2$
39.  $\frac{2}{1-p} - \frac{p}{p-1} + \frac{2p^2+1}{p^2-p}$   $\frac{2}{1-a} - \frac{a}{a-1} + \frac{2a^2+1}{a^2-a}$   $R: \frac{p-1}{p}; \frac{a-1}{a}$
40.  $\frac{a-1}{a-5} - \frac{2a}{a-3} - \frac{12}{a^2-8a+15}$  ;  $\frac{b+2}{b-2} - \frac{b+1}{b-1} - \frac{2}{b^2-3b+2}$   $R: \frac{3-a}{a-5}; \frac{2}{b-2}$
41.  $\frac{a-1}{a+1} - \frac{a^2-2a+1}{a^2+2a+1} + \frac{a^3+a^2+3a+3}{a^3+3a^2+3a+1}$   $R: 1$
42.  $\frac{2}{a-1} - \frac{a}{a^2+a+1} - \frac{2a^2+4a+3}{a^3-1}$   $R: \frac{1}{1-a}$
43.  $\frac{2x+3}{x^3+x^2+x+1} + \frac{2x^2+4x+4}{x^4-1} - \frac{3x+2}{x^3-x^2+x-1}$   $R: \frac{1}{x^2+1}$
44.  $\frac{2b^2}{a^2-b^2} + \frac{a^2-b^2}{ab} - \frac{b^2}{a^2-ab} - \frac{a^2}{ab+b^2}$   $R: \frac{a-b}{a+b}$
45.  $\frac{2}{y^2+3y+2} - \frac{3}{y^2+y-2} + \frac{2y+7}{y^3+2y^2-y-2}$   $R: \frac{1}{y^2-1}$
46.  $\frac{1}{a+b} - \frac{b}{a^2-b^2} - \frac{a+b}{b^2-ab} - \frac{a^2+2ab}{a^2b-b^3}$   $R: \frac{1}{a+b}$
47.  $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2b-b^3} - \frac{a^2+ab+b^2}{ab^2+a^2b} - \frac{a^2-ab-b^2}{ab^2-a^3}$   $R: 0$
48.  $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3} - \frac{a+b}{a-b} + \frac{2ab}{a^2+ab+b^2}$   $R: -\frac{4ab^2}{a^3-b^3}$
49.  $\frac{2x+3}{x^3+x^2+x+1} + \frac{2x^2+4x+4}{x^4-1} - \frac{3x+2}{x^3-x^2+x-1}$   $R: \frac{1}{x^2+1}$
50.  $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)}$   $R: 0$
51.  $\frac{2}{b^2-b-2} + \frac{1}{b^2+3b+2} + \frac{1}{b^3+b^2-4b-4}$   $R: \frac{3}{b^2-4}$

$$52. \frac{a}{9a^2-1} - \frac{2a}{9a^2-6a+1} + \frac{4a}{(3a-1)^2(3a+1)} \quad R: \frac{a}{1-9a^2}$$

Svolgi i seguenti prodotti tra frazioni algebriche:

$$53. \frac{2a+b}{x^2} \cdot \frac{3x^3}{4a^2-b^2} ; \quad \frac{x^2-1}{15x} \cdot \frac{6x^3}{x-1} \cdot \frac{12}{x^2+x} \quad R: \frac{3x}{2a-b}; \frac{24}{5}x$$

$$54. \frac{x^2-2x+1}{y^3} \cdot \frac{xy^2+y^2}{x-1} \cdot \frac{y}{x+1} ; \quad \frac{a-1}{a+4} \cdot \frac{a^2+a-12}{a^2-1} \cdot \frac{a^3+a^2}{a-3} \quad R: x-1; a^2$$

$$55. \frac{a^2-ab}{a+b} \cdot \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} ; \quad \frac{x^2-y^2}{x^3+y^3} \cdot \frac{x^2-xy+y^2}{x^2-xy} \quad R: a; \frac{1}{x}$$

$$56. \frac{a^2+5a+4}{a^3+1} \cdot \frac{a^2-a+1}{a^2-16} \cdot \frac{a^2-8a+16}{6} \quad R: \frac{a-4}{6}$$

$$57. \frac{a^2-3a+2}{a^2-9} \cdot \frac{a^2-a-12}{a^2-a-2} \cdot \frac{a^2-2a-3}{a^2-5a+4} \quad R: 1$$

$$58. \frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2} \cdot \frac{x^2+xy}{x^2-2xy+y^2} \cdot \frac{y-x}{x} \quad R: -1$$

$$59. \frac{x-1}{x+4} \cdot \frac{x^2+x^3}{3x+9} \cdot \frac{x^2+7x+12}{x^2} \cdot \frac{3x^4}{x^2-1} \quad R: x^4$$

$$60. \frac{a^3+4a^2+a+4}{a^2-a-6} \cdot \frac{a^2-5a+4}{a^2-2a+1} \cdot \frac{a^2-4a+3}{a^3-4a^2+a-4} \quad R: \frac{a+4}{a+2}$$

$$61. \frac{a^3+8}{a^3-8} \cdot \frac{a^2-4a+4}{a^2-2a+4} \cdot \frac{a^2+2a+4}{a^2+4a+4} \quad R: \frac{a-2}{a+2}$$

$$62. \frac{6}{3a+3} \cdot \frac{2a^2-2}{a^2-6a+9} \cdot \frac{a^2-4a+3}{2a^2-4a+2} \quad R: \frac{2}{a-3}$$

$$63. \frac{a^2-7a+12}{a^2-a-2} \cdot \frac{2-a}{a^2-9} \cdot \frac{a^2+4a+3}{12-3a} \quad R: \frac{1}{3}$$

$$64. \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-9}{x^2-4x+3} \cdot \frac{x+2}{x+3} \quad R: 1$$

$$65. \frac{3x-6}{x^2-6x+9} \cdot \frac{x^2-9}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-x-6}{x^2+2x-3} \quad R: \frac{3}{x-1}$$

Svolgi le seguenti divisioni tra frazioni algebriche:

$$66. \frac{15x^3y^4}{8a^2b^2c^2} : \frac{25x^2y^2}{24abc^4} ; \quad \frac{a^3-1}{a^2-1} : \frac{a^2+a+1}{a^2+a} \quad R: \frac{9c^2xy^2}{5ab}; a$$

$$67. \frac{a-2}{3a+6} \cdot \frac{a^2-4}{12} ; \quad \frac{6a^2-2a}{a^2} \cdot \frac{9a^2-1}{1+3a} \quad R: \frac{4}{(a+2)^2}; \frac{2}{a}$$

$$68. \frac{x^4-x}{x^4-3x^3+3x^2-x} \cdot \frac{x^3+x^2+x}{x^2y^2-2xy^2+y^2} \quad R: \frac{y^2}{x}$$

$$69. \frac{a^2-6a+9}{a^2+3a} \cdot \frac{3a+a^2}{a^2-5a+6} \cdot \frac{9-a^2}{a-2} \quad R: -\frac{1}{3+a}$$

$$70. \frac{8a^3-1}{3a+2} \cdot \frac{4a^2+2a+1}{9a^2+12a+4} \quad R: (2a-1)(3a+2)$$

$$71. \frac{x^2-4y^2}{a^2-3a} \cdot \frac{ax-2ay}{a^2-1} \cdot \frac{x^2+4y^2-4xy}{a^2-4a+3} \quad R: \frac{x+2y}{a+1}$$

Svolgi le seguenti espressioni di riepilogo sulle frazioni algebriche:

$$72. \left(\frac{1}{x+1}-1\right) \cdot \frac{15}{x^2-x+1} \cdot \frac{x^3+1}{6x} ; \quad \left(\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}+1\right) \quad R: -\frac{5}{2}; \frac{1}{x}$$

$$73. \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right) \cdot \frac{a^3-b^3}{a^3b^3} ; \quad \left(x-\frac{1-x}{2}\right) \cdot \left(x-\frac{x}{1-x}\right) \cdot \frac{5x-5}{3x-1} \quad R: \frac{5}{2x^2}; \frac{a^2b^2}{a-b}$$

$$74. \left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{8x^2}{x^4-1} ; \quad \left(a+\frac{1}{a}\right) \cdot \left(a-\frac{1}{a}\right) \cdot \left(a^2-\frac{1}{a^2}\right) \quad R: 8; 1$$

$$75. \left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right) \cdot \left(\frac{a-b}{a+b}-1\right) ; \quad \left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right) \cdot \frac{x-y}{x^2} \cdot \frac{x^3+x^2y}{x^2+y^2} \quad R: \frac{2a}{b-a}; 1$$

$$76. \left(a-\frac{1}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{a-1}\right)^2 ; \quad \left(1+\frac{1}{x-1}\right)^2 \cdot \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3} \quad R: (a+1)^2; \frac{x-1}{x}$$

$$77. \left(1-\frac{a^3}{b^3}\right) \cdot \frac{b}{b-a} - \left(1+\frac{a}{b}\right)^2 ; \quad \left(\frac{x}{1+x}-\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{x^2-1}\right) \cdot \frac{1-x^2}{3x^2} \quad R: -\frac{a}{b}; -1$$

$$78. \left(\frac{1}{x-x^2}+\frac{2x}{1-x^2}+\frac{1}{x-1}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{x^2+1}\right) \cdot \frac{x}{x-1} \quad R: \frac{1}{1-x}$$

$$79. \left(\frac{x^2+y^2}{2xy}+1\right) \cdot \frac{xy}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}\right) \quad R: \frac{x+y}{x-y}$$

$$80. \left(\frac{a^2}{a^2-1}-\frac{a^2}{a^2+4}\right) \cdot \left(\frac{a^2}{a^2+1}-\frac{a^2}{a^2-4}\right) \cdot \left(1-\frac{16}{a^4}\right) \quad R: \frac{25}{1-a^4}$$

$$81. \left(\frac{a+2}{a}-\frac{2}{a^2+a}\right) \cdot \frac{a^2-6a+9}{a^2-a} \cdot \frac{a^2-1}{a^2-9} \quad R: \frac{a-3}{a}$$

$$82. \left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y-x}+\frac{2x}{x^2-y^2}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{xy}{x-y} \quad R: 2$$

$$83. \left(\frac{a}{b^3}-\frac{1}{b^2}\right) \cdot \left(\frac{a-b}{b}-\frac{2a}{b-a}-\frac{a^2}{ab-b^2}\right) \cdot \frac{ab^2-b^2}{a-1} \quad R: 1$$



84.  $(\frac{2a^3}{a^3-b^3}-1) \cdot (1+\frac{2ab}{a^2-ab+b^2}) \cdot \frac{a^2+ab}{a^3+b^3} \cdot \frac{a^2-ab+b^2}{a+b}$   $R: \frac{a}{a-b}$
85.  $(\frac{x+y}{2x-2y} + \frac{2y^2}{x^2-y^2} - \frac{x-y}{2x+2y}) \cdot \frac{x-y}{2y}$   $R: 1$
86.  $(\frac{x^2y+xy^2}{x^3-y^3} + \frac{x^2+xy}{x^2+xy+y^2} - \frac{x+y}{x-y}) \cdot \frac{x^3-y^3}{x^3+y^3} \cdot \frac{x^2-xy+y^2}{y}$   $R: -x-y$
87.  $\frac{x^2+x-6}{x^2-x-6} \cdot (\frac{1}{x+3}-1) \cdot (\frac{1}{x-2}-1)$   $R: 1$
88.  $(\frac{a-b}{a+b}+1) \cdot (2a-\frac{a^2-ab}{a-b}) : \frac{a-2b}{a+b} \cdot \frac{a-2b}{2a^2}$   $R: 1$
89.  $(\frac{x^2}{y^2}-2+\frac{y^2}{x^2}) \cdot \frac{x^4y^4}{xy+y^2} \cdot (\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}) : (x^3-2x^2y+xy^2)$   $R: x^3+y^3$
90.  $(\frac{a+b}{a^2-ab} + \frac{a-b}{a^2+ab}) \cdot (\frac{1}{a^2} - \frac{4}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2}) : (\frac{a}{b} - \frac{b}{a}) \cdot \frac{a^2}{2}$   $R: \frac{1}{b}$
91.  $\frac{a^2-4}{a^2-2a+1} \cdot [(\frac{a-3}{a-2}-2) : (\frac{4a-5}{1-a}+3)] \cdot \frac{1}{a^2+4a+4}$   $R: \frac{1}{a^2-4}$
92.  $(\frac{a+b}{a-b}-2+\frac{a-b}{a+b}) : (\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}) : (\frac{a+b}{b}-1)$   $R: 1$
93.  $(\frac{x^3}{x^2-2x+4})^2 \cdot (\frac{1}{x^2+2x})^3 \cdot (\frac{x^3+8}{x})^2$   $R: \frac{x}{x+2}$
94.  $(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2) \cdot (1 - \frac{a^2}{a^2-b^2}) \cdot (\frac{2a}{a-b} - 1)$   $R: -\frac{b}{a}$
95.  $\frac{x}{x+y} + (1 + \frac{2x}{y} + \frac{x^2}{y^2}) \cdot (1 - \frac{x}{x+y})^3$   $R: 1$
96.  $(\frac{1}{x+y} - \frac{3}{x-y} + \frac{y}{x^2+xy} - \frac{x}{xy-y^2}) \cdot \frac{x^2y-xy^2}{x^2+2xy+y^2}$   $R: -1$
97.  $(\frac{4}{a-3} - \frac{3a-5}{a^2-4a+3}) \cdot (\frac{2}{a-1} + \frac{a+2}{a+1}) \cdot \frac{a^2-4a+3}{a^2+3a}$   $R: \frac{1}{a-1}$
98.  $(\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b}) \cdot (\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2) \cdot (\frac{a-3b}{a+b} + \frac{2ab+2b^2}{a^2+2ab+b^2})$   $R: -4$
99.  $(\frac{x-1}{x^2+4x+3} - \frac{x-2}{x^2+6x+5}) \cdot \frac{x^2+8x+15}{9x^2-1} \cdot (\frac{4}{x+1}-3) \cdot (\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 1)$   $R: -\frac{1}{x^2}$
100.  $[(\frac{ab}{a^2+b^2}+1) : (1-\frac{ab}{a^2+b^2})] \cdot \frac{a^3+b^3}{a^3-b^3} + \frac{a^2+b^2}{a-b} - \frac{a+b}{a-b} - \frac{2ab}{a-b}$   $R: a-b$
101.  $[(\frac{a^2+b^2}{ab}+2) : (\frac{a^2+b^2}{ab}-2)] : (\frac{a}{a-b} : \frac{b}{a+b})^2 + \frac{b^3+a^2-ab^2}{a^3-a^2b}$   $R: \frac{1}{a-b}$

102.  $[(\frac{b}{a-1})^2 - (\frac{b}{a+1})^2] \cdot (1 - \frac{1}{a}) \cdot (\frac{1}{a} + 1)^2 : [(2\frac{b}{a-1})^2 \cdot (1 - \frac{1}{a})]$   $R: \frac{1}{a}$
103.  $[(1 - \frac{2}{a} + \frac{1}{a^2}) : (1 - \frac{1}{a^2})]^2 : (\frac{1}{a^2+a} - 2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1})^2 \cdot (\frac{1}{a^2} + \frac{2}{a} + 1)$   $R: \frac{1}{4}$
104.  $\frac{a-b}{a+b} : \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2} - (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{ab}) : \frac{a^3+b^3}{a^3b^2}$   $R: \frac{b}{a+b}$
105.  $(\frac{a}{a^2-2a+1} - \frac{2a}{a^2-1} + \frac{a}{a^2+2a+1}) \cdot (a^3 - \frac{1}{a}) \cdot (a - \frac{1}{a})$   $R: \frac{4(a^2+1)}{a}$
106.  $(\frac{1}{x-y} - \frac{x-y}{x^2+xy+y^2} - \frac{y^2}{x^3-y^3}) \cdot (\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1) \cdot (\frac{1}{y} - \frac{1}{x})$   $R: \frac{3x-y}{x^2y}$
107.  $(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y} + \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}) \cdot \frac{x^4-2x^2y^2+y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}$   $R: \frac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$
108.  $(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1})(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2})(x+1 - \frac{2}{x})$   $R: \frac{4}{(x+1)(2-x)}$
109.  $(\frac{y}{y^3-1} - \frac{1}{y^2+y+1})(2 - \frac{y+3}{y+1})(y^2+y+1)$   $R: \frac{1}{y+1}$
110.  $(\frac{1}{b^2-9} - \frac{1}{b^2+9})(1 - \frac{9}{b^2})(1 + \frac{b^2}{9})$   $R: \frac{2}{b^2}$
111.  $(\frac{b}{a^2-2ab} - \frac{b}{a^2+2ab})(1 - \frac{a}{2b})(1 + \frac{a}{2b})$   $R: -\frac{1}{a}$
112.  $(\frac{x+1}{x^2-2x} - \frac{1}{x-2})(\frac{x-1}{x^2+2x} - \frac{1}{x+2})(x^2-4)$   $R: -\frac{1}{x^2}$
113.  $[\frac{3x-y}{x+y} + \frac{x+2y}{x-y} + \frac{x(x+5y)}{y^2-x^2}]^2 : (1 - \frac{2y}{x+y})^3$   $R: \frac{9(x+y)}{x-y}$
114.  $(\frac{x-6}{x^2+3x-4} - \frac{2}{x+4} - \frac{2}{x-1}) : (\frac{1}{x-1})^2$   $R: -3(x-1)$
115.  $[(\frac{a^2+b^2+ab}{a+b} + \frac{b^2}{a-b} + \frac{ab^2}{b^2-a^2}) : (b - \frac{b^2}{a+b}) - \frac{a}{b}] \cdot \frac{a^2-b^2}{a}$   $R: a+b$
116.  $(\frac{a+1}{a-2} + \frac{3a-5}{a+3} - \frac{3a^2+7}{a^2+a-6}) : \frac{a^2-4a-12}{a^2+4a+3}$   $R: \frac{a^2-1}{a^2-4}$
117.  $(\frac{a^2-2ab+4b^2}{a-2b} - \frac{a^2+2ab+4b^2}{a+2b}) : \frac{4b^2}{a^2+4ab+4b^2}$   $R: \frac{4b(a+2b)}{a-2b}$
118.  $\frac{1}{x+y} \cdot (\frac{x}{x+y} + \frac{3y}{x-y}) : (\frac{x}{x+y} + \frac{3y^2+3xy}{x^2-y^2})$   $R: \frac{1}{x+y}$
119.  $(\frac{a+1}{a} - \frac{a+1}{a-1}) \cdot (\frac{a+1}{a-2} - \frac{2}{a+1}) : \frac{2a^2+10}{a^2-3a+2}$   $R: -\frac{1}{2a}$

120.  $\left[\left(\frac{x+y}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y} + \frac{x^2-2xy+y^2}{y^2-x^2}\right) : \frac{2x(x+y)}{y}\right] : \frac{y^2}{x^3-x^2y}$   $R: 1$
121.  $\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} - \frac{a}{a^2-b^2}\right) : \frac{a}{a+b}$   $R: \frac{1}{a-b}$
122.  $\left(\frac{x}{xy-y^2} - \frac{1}{x+y} + \frac{3}{x-y} - \frac{y}{x^2+xy}\right) \cdot \frac{x^2y-xy^2}{x^2+2xy+y^2}$   $R: 1$
123.  $1 - \frac{a-b}{a+b} : \frac{a^2+b^2-2ab}{a^2-b^2} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{ab}\right) : \frac{a^3+b^3}{a^3b^2}$   $R: \frac{a}{a+b}$
124.  $\left[\left(1 - \frac{2}{a} + \frac{1}{a^2}\right) : \left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\right]^2 : \left(\frac{1}{a^2+a} - 2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2}{a} + 1\right)$   $R: \frac{1}{4}$
125.  $\frac{a^3+3a^2-3a-9}{a^2-2a-3} \cdot \left[\frac{a}{a^3+a^2-3a-3} + \frac{a^3-1}{a^4-9} \cdot \left(\frac{a+1}{a-1} - \frac{2}{a+1}\right)\right]$   $R: \frac{a+3}{a-3}$
126.  $\left(\frac{1}{b^2-ab} + \frac{2b}{ab^2-a^3} - \frac{1}{ab+a^2}\right) \cdot \frac{ab^2-a^2b}{a^3+b^3}$   $R: \frac{1}{a^2-ab+b^2}$
127.  $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} + \frac{4a^2}{b^2-a^2}\right) \cdot \frac{a^2+b^2+2ab}{4a}$   $R: -(a+b)$