I RADICALI

La radice n-esima aritmetica

Dato un numero naturale *n* diverso da zero e un numero reale *a* positivo o nullo, si dice radice

n-esima aritmetica di *a* il numero reale *b* positivo o nullo la cui potenza *n*-esima è uguale ad *a* :

$$\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a \qquad con\ n \in N_0\ e\ a, b \in R^+$$

Il simbolo $\sqrt[n]{a}$ si chiama **radicale aritmetico**

- Il numero **a** si chiama **radicando**
- Il numero **n** si chiama **indice** della radice

- Proprietà 1 : $\sqrt[n]{a^n} = a$

SEMPLIFICAZIONE DEI RADICALI

- Proprietà 2: proprietà invariantiva

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

1) PROPRIETA' INVARIANTIVA

Il valore di un radicale aritmetico non cambia se si dividono l'indice della radice e l'esponente del radicando per un loro divisore comune (cosi come se si moltiplica indice ed esponente per uno stesso numero).

Applicando questa proprietà è possibile semplificare un radicale ,che si chiama irriducibile

Es.

$$\sqrt{\left(\frac{9}{16}x^4y^2\right)} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 x^4 y^2} = \frac{3}{4}\, x^2 y$$

RIDUZIONE DEI RADICALI ALLO STESSO INDICE

- Si semplificano tutti i radicali
- Si determina il m.c.m. degli indici e lo si assume come indice comune di tutti i radicali
- Si trasforma ciascun radicale in un radicale equivalente con l'indice comune,dividendo quest'ultimo per ciascuno dei vecchi indici ed elevando il radicando al quoziente così ottenuto
- Es. $\sqrt[4]{(a^3b^5)}$ $\sqrt[6]{(a^5b^4)}$

determiniamo il m.c.m. degli indici =12

$\sqrt[12]{(a^9b^{15})}$ $\sqrt[12]{(a^{10}b^8)}$

- MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE DI RADICALI

I radicali aritmetici si possono moltiplicare o dividere tra loro se hanno lo stesso indice ,in caso contrario,si devono prima ridurre allo stesso indice .

Si ottiene così un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto o il quoziente dei radicandi

Es.) $\sqrt[3]{a^2x^2} * \sqrt[3]{y}$

TRASPORTO DI UN FATTORE SOTTO RADICE

Un fattore positivo si può trasportare sotto il segno di radice *n*-esima,come fattore del radicando, elevandolo a potenza *n*-esima

$$a\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{(a^3b^2)}$$

TRASPORTO DI UN FATTORE DENTRO IL SIMBOLO DI RADICE

Dato un radicale di indice n ogni fattore del radicando con esponente maggiore o uguale all’indice n può essere trasportato all’esterno.

Si divide l’esponente del fattore per n, il quoziente è l’esponente del fattore da portare fuori, il resto è l’esponente del fattore che resta sotto all’interno.

ES. $\sqrt[3]{(2a^3\,b^7)} = ab^2\sqrt[3]{(2b)}$

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE DEI RADICALI

E' possibile calcolare la somma algebrica solo dei radicali simili, che hanno lo stesso radicando e lo stesso indice, e che quindi differiscono solo per un eventuale fattore moltiplicativo esterno alla radice, che possiamo chiamare coefficiente del radicale: la somma è un radicale simile, che ha per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti

Es. $3\sqrt[5]{a} + 7\sqrt[5]{a} - 2\sqrt[5]{a} = 8\sqrt[5]{a}$

Razionalizzazione dei denominatori delle frazioni

Quando si opera con frazioni che hanno denominatori in cui compaiono uno o più radicali, è conveniente attraverso opportuni calcoli trasformare il denominatore: l'operazione si chiama razionalizzazione.

- Al denominatore compare una radice quadrata

$$\frac{x}{\sqrt{a}} = \frac{x}{\sqrt{a}} * \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{x\sqrt{a}}{a}$$

- Al denominatore compare una radice con indice maggiore di 2

$$\frac{x}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{x}{\sqrt[n]{a^m}} * \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{x\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$$

- Al denominatore compaiono somma o differenza di radicali quadratici

$$\frac{x}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{x}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})} * \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{x\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{(a-b)}$$

$$\frac{x}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{x}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})} * \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{x\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{(a-b)}$$

Potenze con esponente frazionario

La potenza di un numero reale positivo che ha per esponente una frazione è uguale al radicale aritmetico che ha per indice il denominatore della frazione e per radicando il numero elevato al numeratore della frazione

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \;\; con\, a \in R^+ \;\; e\, m,n \in a\, N_0$$

Vale anche viceversa, cioè ogni radicale aritmetico si può scrivere sottoforma di potenza con esponente frazionario

1. Confronta i radicali, inserendo il simbolo <, >, = , senza utilizzare la calcolatrice, mostra il procedimento:

$$\sqrt{0{,}1} \quad \dots\dots \quad \sqrt[3]{0{,}01}$$ p. ___/0,5

2. Spiega quale delle seguenti espressioni rappresenta un numero reale e quale no e perché.

$\sqrt{-4}$ ______________________ $\sqrt[3]{(-2)^3}$ ______________________ [p.___/ 1

$\sqrt{0{,}01}$ ______________________ $\sqrt[4]{(-3)^2}$ ______________________

3. Semplifica, se possibile, i seguenti radicali, supponendo tutte le lettere non negative:

$\sqrt[4]{2^6 3^4}$ $\quad \sqrt{16a^4b^8}$ $\quad \sqrt{x^7y^6}$ $\quad \sqrt{a^4+6a^3+9a^2}$ p.___/ 1,25

4. Trasporta sotto il segno di radice tutti i fattori possibili, supponendoli non negativi:

$2a^2b\sqrt{\frac{b}{6a^3}}$ $\quad (x-y)\sqrt{\frac{1}{x^2-y^2}}$ $\quad \frac{a}{a-3b}\sqrt[4]{\frac{a^2-6ab+9b^2}{a}}$

p.___/ 0,25*2+0,5*2=1,5

5. Trasporta fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili, supponendoli non negativi:

$\sqrt{180}$ $\quad \sqrt[3]{\frac{25a^7b^{11}}{27c^5}}$ $\quad \sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}}$ p.___/ 0,25+0,5+0,75=1,5

6. Calcola le seguenti espressioni con i radicali: p.___/ 0,75 + 0,5+0,75=2

$$3\sqrt[4]{16}-3\sqrt{4}-\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}}+\left(\sqrt{5}\right)^2-\sqrt[6]{4^6}+\sqrt{\sqrt[3]{64}}=$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{4}}\right)^6=$$

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2+\left(2-\sqrt{6}\right)\sqrt{6}+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=$$